

۱- در یک دنباله هندسی نزولی هر جمله آن، نصف مجموع تمام جملات بعدی است. قدرنسبت آن کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{2}{3}$       (۴)  $\frac{3}{4}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = \frac{1}{2} \frac{aq}{1-q} \Rightarrow q = 2 - 2q \rightarrow 3q = 2$$

$$q = \frac{2}{3}$$

۲- در یک دنباله عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله، صفر است؟

- (۱) ۹      (۲) ۱۰      (۳) ۱۱      (۴) ۱۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر  $t_3$  و  $t_7$  و  $t_9$  جملات دنباله حسابی و  $a_1, a_2, a_3$  جملات متوالی دنباله هندسی باشند. در این صورت:

$$a_3^2 = a_1 a_9 \Rightarrow t_7^2 = t_3 t_9 \Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 8d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1^2 + 12t_1 d + 36d^2 = t_1^2 + 8dt_1 + 2t_1 d + 16d^2$$

$$\Rightarrow 2t_1 d + 20d^2 = 0 \Rightarrow 2d(t_1 + 10d) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} t_1 + 10d = 0 \Rightarrow t_{11} = 0$$

۳- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله  $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، کدام است؟

- (۱) -۴      (۲) -۲      (۳) ۲      (۴) ۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با فرض این که  $x^2 + x = t$  باشد، معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (x^2 + x - 12)(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow S = x' + x'' = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + x' + x'' = -2$$

۴- اگر  $\beta, \alpha$  ریشه‌های معادله  $x(5x+3)=2$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب‌های

معادله  $4x^2 - kx + 25 = 0$  به صورت  $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$  است؟

۳۱ (۴)

۲۹ (۳)

۲۸ (۲)

۲۷ (۱)

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$x(5x+3)=2 \Rightarrow 5x^2+3x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = -\frac{3}{5} \\ \alpha\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{\left(\frac{-3}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{-2}{5}\right)}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4}$$

$$P = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{29}{4} \\ P = \frac{25}{4} \end{array} \right\} x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{25}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 29x + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

راه حل خاص:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow 4(1) - k(1) + 25 = 0 \Rightarrow k = 29 \\ \beta = \frac{2}{5} \end{cases}$$

۵- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$  کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۲ (۱)

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + 4x + 3 = a \Rightarrow a = \sqrt{a+2} \Rightarrow a^2 = a+2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ غ ق} \\ a = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

۶- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهارجمله‌ی اول آن ۳ می‌باشد. مجموع جمله‌ی اول کدام است؟

۱۳/۴ (۴)

۱۲/۶ (۳)

۱۱/۲ (۲)

۱۰/۸ (۱)

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \quad (1)$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$S_4 = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = 3 \quad (2)$$

$$(1) \div (2) \Rightarrow \frac{a_1(1 + q^2)}{a_1(1 - q^2)(1 + q^2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 2$$

$$(1) : a_1 + a_1(2)^2 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5}$$

$$S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{5}(1 - 64)}{1 - 2} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$$

۷- فاصله مبدا مختصات از نقطه تلاقی دو خط به معادلات  $3y = 2x + 11$  و  $2y + x = 5$  کدام است؟

$\sqrt{10}$  (۴)

۳ (۳)

$\sqrt{8}$  (۲)

۲ (۱)

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 2y + x = 5 \\ 3y = 2x + 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + x = 5 \\ 3y - 2x + 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +4y + 2x = +10 \\ 3y - 2x = 11 \end{cases}$$

$$7y = 21 \Rightarrow y = 3$$

$$y = 3 \Rightarrow x = -1 \quad A(-1, 3) \rightarrow OA = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

۸- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات  $2x - 2y = 3$  و  $y = x + 1$  هستند. مساحت این مربع کدام است؟

$\frac{25}{4}$  (۴)

$\frac{25}{8}$  (۳)

$\frac{9}{4}$  (۲)

$\frac{9}{8}$  (۱)

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. دو خط موازیند و فاصله‌ی بین آنها طول ضلع مربع است.

$$2x - 2y = 3 \rightarrow x - y - \frac{3}{2} = 0 ; y = x + 1 \rightarrow x - y + 1 = 0$$

$$a = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|1 + \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} ; S = a^2 = \frac{25}{8}$$

۹- حاصل عبارت  $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$  به ازای  $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{t^{11} + t^{10} + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1} = \frac{t^{12} - 1}{t - 1} = \frac{t^3 - 1}{t - 1} = t^2 + t + 1$$

جواب = ۱ + ۱ = ۲

$$t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \sqrt{5} = 2t + 1 \Rightarrow 5 = 4t^2 + 4t + 1 \Rightarrow t^2 + t = 1$$

تذکر: صورت کسر دنباله هندسی  $a_1 = 1$  و  $q = t$  و  $n = 12$  و مخرج دنباله هندسی  $a_1 = 1$  و  $q = t^3$  و  $n = 4$  می باشد.

۱۰- به ازای یک مقدار  $x$ ، اعداد  $x^2 - 2$ ،  $2x$  و  $x^2 + 4$  به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

- (۱)  $\frac{117}{16}$  (۲)  $\frac{125}{16}$  (۳)  $\frac{63}{4}$  (۴)  $\frac{127}{8}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 9 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow \text{جملات: } 8 \text{ و } 4 \text{ و } 2 \rightarrow q = \frac{1}{2} \\ x = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$S_7 = \frac{a_1(1 - q^7)}{1 - q} = \frac{1 \left(1 - \frac{1}{2^7}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \left(\frac{2^7 - 1}{2^7}\right) = \frac{127}{8}$$



۱۳- اگر  $x = 4$  یکی از جواب‌های معادله  $x + a = \sqrt{5x - x^2}$  باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) جواب دیگر ندارد.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.  $x = 4 \Rightarrow 4 + a = \sqrt{20 - 16} \Rightarrow a = -2$

$$x - 2 = \sqrt{5x - x^2} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 5x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{9}{2} \xrightarrow{x_1 = 4} 4 + x_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

جواب به دست آمده در دامنه‌ی معادله قرار ندارد.

۱۴- ده عدد جملات متوالی از دنباله‌ی حسابی‌اند، مجموع ۵ جمله‌ی اول ۵۵ و مجموع ۵ جمله‌ی آخر آن‌ها ۱۳۰ می‌باشد، کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

- (۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.  $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

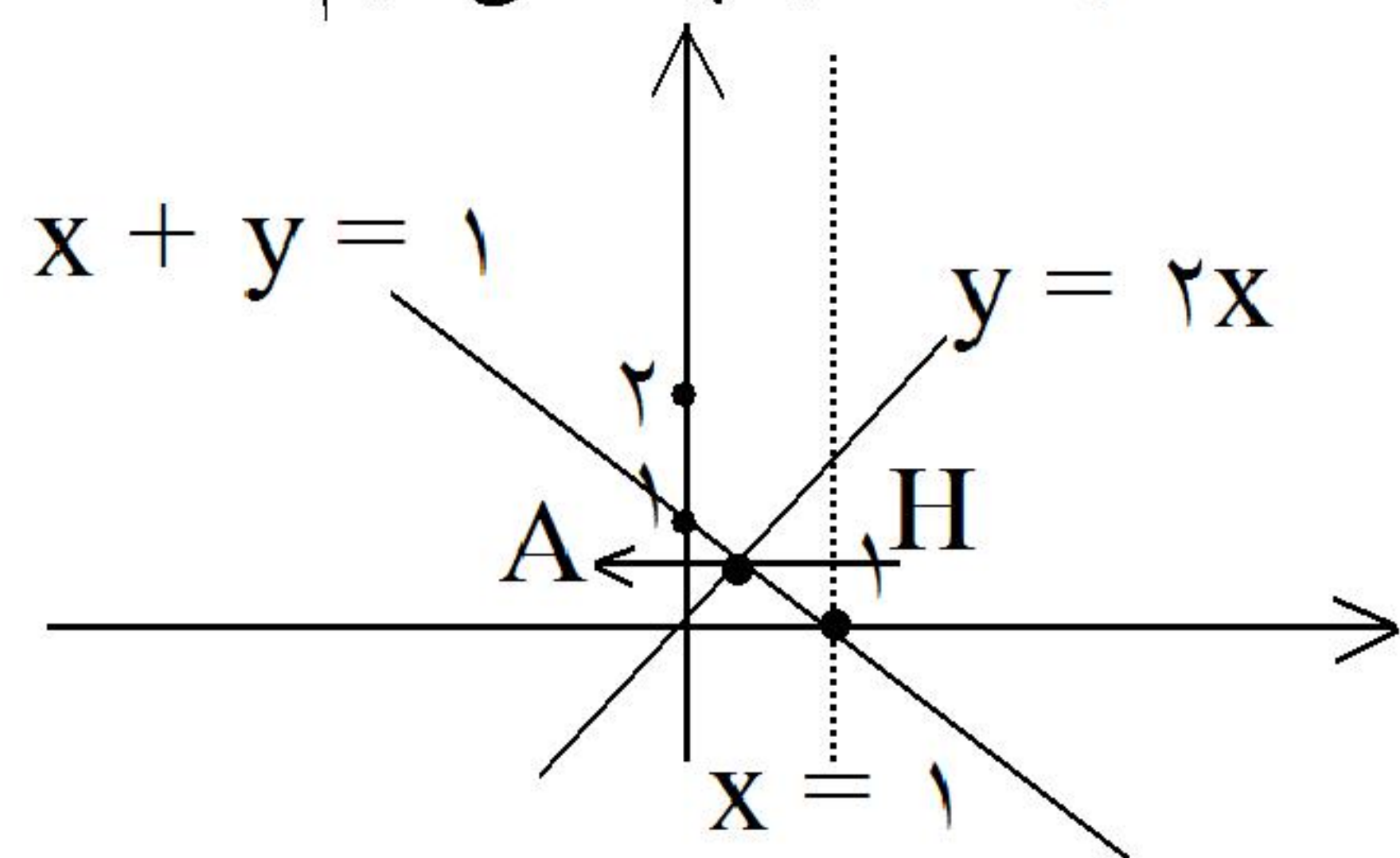
$$\begin{cases} S_5 = 55 \\ S_{10} = 55 + 130 = 185 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 55 = \frac{5}{2}[2a + 4d] \\ 185 = \frac{10}{2}[2a + 9d] \end{cases} \Rightarrow 5d = 15 \Rightarrow d = 3$$

$$2a + 4(3) = 22 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

۱۵- معادله‌ی سه ضلع یک مثلث  $x + y = 1$ ,  $y = 2x$ ,  $x = 1$  است. معادله‌ی خطی که کوچکترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟

- (۱)  $y = \frac{2}{3}$       (۲)  $x = \frac{2}{3}$       (۳)  $y + x = \frac{2}{3}$       (۴)  $y + x = \frac{1}{3}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل  $AH$  کوچکترین ارتفاع است. از طرفی می‌دانیم خط عمود بر خط  $x = 1$  به صورت  $y = C$  می‌باشد. نقطه‌ی  $A$  محل برخورد دو خط  $y = 2x$  و  $x + y = 1$  را پیدا می‌کنیم.



$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}y = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

۱۶- دنباله هندسی ... و  $\frac{1}{2}$  و  $x$  و ۲ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

- (۱)  $\frac{41}{32}$       (۲)  $\frac{21}{16}$       (۳)  $\frac{11}{8}$       (۴)  $\frac{23}{16}$

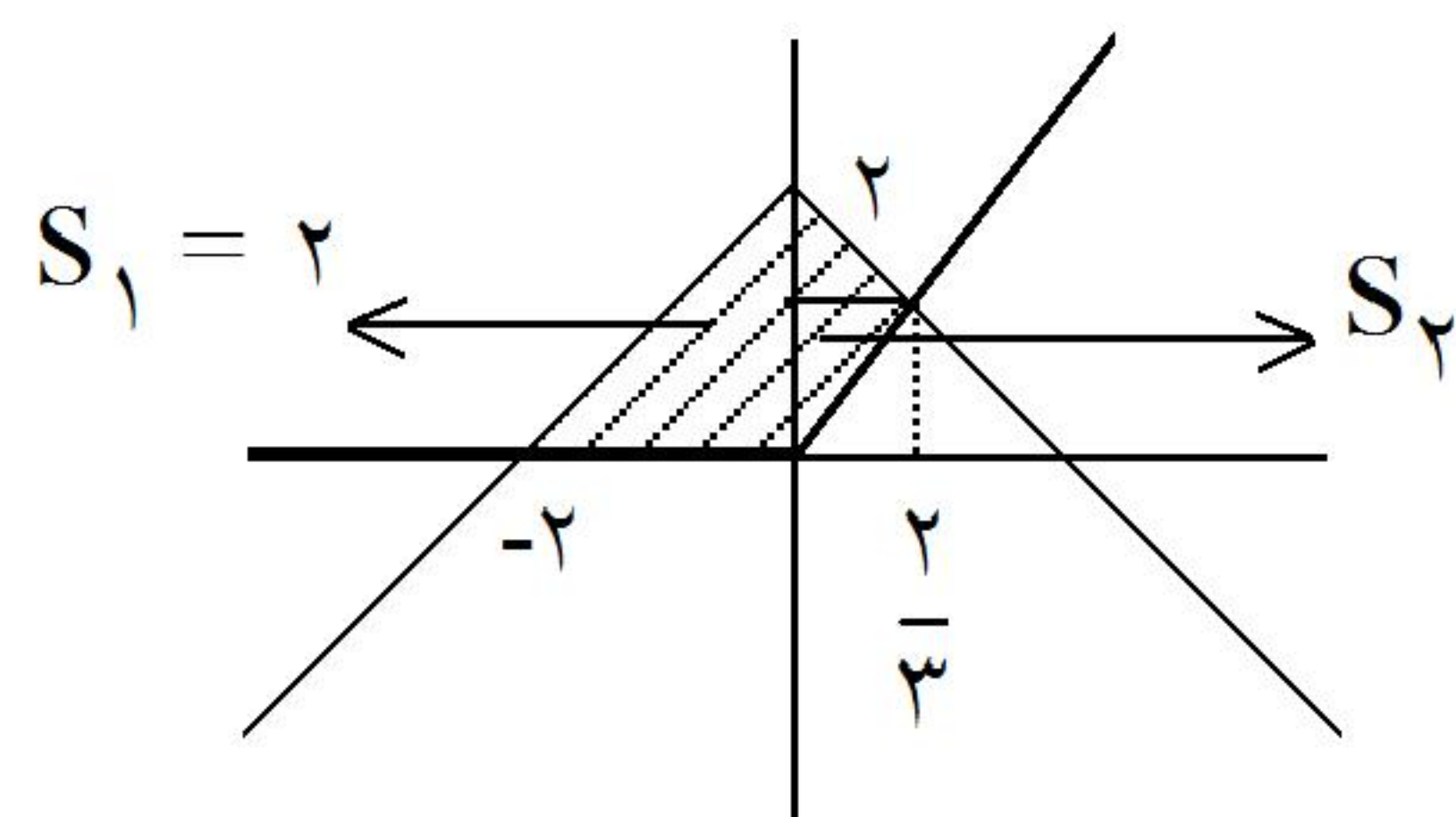
گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.  $x^2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{\text{غیرنزولی}} x = -1$  و  $q = \frac{-1}{2}$

$$S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{2\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^6\right)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{64}\right) \Rightarrow S_6 = \frac{4}{3} \times \frac{63}{64} = \frac{21}{16}$$

۱۷- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع  $y = 2 - |x|$  و  $y = x + |x|$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{7}{3}$  (۳)  $\frac{8}{3}$  (۴) ۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$2 - |x| = x + |x|$$

$$2 = x + 2|x|$$

$$x > 0 \rightarrow 2 = 3x \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S_2 = \frac{2}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$S_1 + S_2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

۱۸- معادله رادیکالی  $3\sqrt{2x-9} = 2-x$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد جواب

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2x - 9 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{9}{2}$$

$$2 - x \geq 0 \rightarrow 2 \geq x$$

اشتراک دو دامنه بدست آمده تهی است.

۱۹- فاصله نقطه  $A(0, -2)$  از خط به معادله  $y = x\sqrt{3} + 4$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳) ۳ (۴) ۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x\sqrt{3} - y + 4 = 0$$

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\sqrt{3} \times 0 + (-1) \times (-2) + 4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{4}} = 3$$

۲۰- در معادله  $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 3$  حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳) ۱ (۴) ۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x(x-2)} = 3 \rightarrow x^2 + x - 2 = 3x(x-2)$$

$$x^2 + x - 2 = 3x^2 - 6x \rightarrow 3x^2 - 6x - x^2 - x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow \text{حاصلضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1$$

۲۱- اگر  $f(x) = |2x - 5|$  باشد، مقدار  $f(2 + \sqrt{2}) + f(1 + \sqrt{2})$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $4\sqrt{2} - 4$  (۳) ۳ (۴)  $2\sqrt{2} + 2$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = |2x - 5| \Rightarrow f(2 + \sqrt{2}) = |2(2 + \sqrt{2}) - 5| = |4 + 2\sqrt{2} - 5| = \underbrace{|2\sqrt{2} - 1|}_{+}$$

$$= 2\sqrt{2} - 1$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = |2(1 + \sqrt{2}) - 5| = |2 + 2\sqrt{2} - 5| = \underbrace{|2\sqrt{2} - 3|}_{-} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(2 + \sqrt{2}) + f(1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1 + 3 - 2\sqrt{2} = 2$$

۲۲- در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x + 3 & x \leq 3 \end{cases}$  مقدار  $f(f(5)) + f(f(1))$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(f(5)) + f(f(1)) = f(2) + f(5) = 7 + 2 = 9$$

۲۳- اگر  $g(x) = 2x - 3$  و  $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$  باشند، تابع  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $x^2 - 4x + 3$  (۲)  $x^2 - 4x + 5$  (۳)  $x^2 - 2x + 5$  (۴)  $x^2 - 2x + 3$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. راه اول:

$$f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5) \Rightarrow f(2x - 3) = 4(x^2 - 4x + 5)$$

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2} \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t^2 + 6t + 9}{4} - 4\left(\frac{t+3}{2}\right) + 5\right) = t^2 - 2t + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$f(2x - 3) = 4(x^2 - 4x + 5) \xrightarrow{x=2} f(1) = 4$$

راه دوم:

فقط گزینه ۳ به ازای  $x = 1$  برابر ۴ می شود.

۲۴- در تابع با ضابطه  $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$  مقدار  $f^{-1}(4)$  کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۵ (۳) -۲ (۴) تعریف نشده

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A \Big|_{\frac{a}{4}} \in f \Rightarrow 4 = -x + \sqrt{-2x} \Rightarrow \sqrt{-2x} = x + 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2x = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{قابل قبول} \\ x = -8 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

نکته، این تست به کمک گزینه‌ها به سادگی حل می شود.



۲۵- اگر  $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$  مقدار  $f(f(-144))$  کدام است؟

(۱) تعریف نشده (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(-144) = \sqrt{-144 + 2 \times 144} = \sqrt{144} = 12$$

$$f(12) = \sqrt{12 + 2 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

۲۶- اگر جزء صحیح  $(x^2 + x)$  برابر ۱- باشد، آن‌گاه  $[x^{20}]$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$-1 \leq x^2 + x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^{20} < 1 \Rightarrow [x^{20}] = 0$$

۲۷- دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = [x] + [-x]$  و  $g(x) = x^2 + x - 2$  مفروض‌اند. اگر  $g(f(x)) = -2$  باشد، مجموعه مقادیر  $x$  کدام است؟

(۱)  $R - Z$  (۲)  $Z$  (۳)  $R$  (۴)  $\emptyset$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} g(0) & x \in Z \\ g(-1) & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 & x \in Z \\ -2 & x \notin Z \end{cases} = -2$$

پس  $g(f(x))$  همواره برابر ۲- است.

۲۸- اگر  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = x^2 + 2x + 1$  باشد، حاصل  $(g \circ f)(1 - \sqrt{2}) - (f \circ g)(1 - \sqrt{2})$  کدام است؟

(۱)  $4(1 - \sqrt{2})$  (۲)  $4(\sqrt{2} - 1)$  (۳) ۴ (۴)  $4\sqrt{2}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = (x + 1)^2 \Rightarrow g(1 - \sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(1 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} \Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(1 - \sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\text{جواب} = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

۲۹- اگر  $f(x - 3) = x^2 - 4x + 5$ ، آنگاه  $f(1 - x)$  کدام است؟

(۱)  $x^2 + 1$  (۲)  $x^2 + 3$  (۳)  $x^2 + 4x + 5$  (۴)  $x^2 - 4x + 5$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \rightarrow -x + 4 \Rightarrow f(1 - x) = (-x + 4)^2 - 4(-x + 4) + 5 = x^2 - 4x + 5$$

راه دوم:

$$f(x - 3) = (x - 2)^2 + 1 \xrightarrow{x - 3 = t} f(t) = (t + 3 - 2)^2 + 1 = (t + 1)^2 + 1 \Rightarrow f(1 - x) = (1 - x + 1)^2 + 1 =$$

$$4 - 4x + x^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$$

۳۰- تابع  $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$  و  $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$  مفروض اند، اگر  $(4,1) \in \text{gof}$

$(4,2) \in \text{fog}$  باشند، دوتایی  $(a,b)$  کدام است؟

- (۱)  $(3,4)$       (۲)  $(4,3)$       (۳)  $(4,5)$       (۴)  $(5,4)$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا fog و gof را تشکیل می دهیم:

$$\text{fog} = \{(1,1), (3,7), (a,2), (b,7)\} \quad (4,2) \in \text{fog} \Rightarrow a = 4$$

با توجه به این که  $(4,1)$  در gof است پس:

$$g(f(4)) = 1 \Rightarrow g(5) = 1 \Rightarrow b = 5$$

۳۱- اگر  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + |2x|$  باشد،  $f(2\sqrt{2} - 3)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{3}$       (۲)  $-\frac{2}{3}$       (۳)  $\frac{1}{3}$       (۴)  $\frac{2}{3}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم  $\sqrt{2}$  تقریباً برابر با  $1/4$  است، بنابراین  $2\sqrt{2} \approx 2/8$  می شود و عدد

$2\sqrt{2} - 3$  یک عدد منفی خواهد بود و اعداد منفی هنگام بیرون آمدن از قدرمطلق، یک منفی در آنها ضرب می شود.

با جای گذاری عدد  $2\sqrt{2} - 3$  در تابع مسئله داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x^2 + |2x| \xrightarrow{x = 2\sqrt{2} - 3} f(2\sqrt{2} - 3) = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 3)^2 + |2(2\sqrt{2} - 3)| \\ &= -\frac{1}{3}\left((2\sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(3) + (3)^2\right) - 2(2\sqrt{2} - 3) = -\frac{1}{3}(8 - 12\sqrt{2} + 9) - 4\sqrt{2} + 6 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{12\sqrt{2}}{3} - \frac{9}{3} - 4\sqrt{2} + 6 = -\frac{1}{3} + 4\sqrt{2} - 3 - 4\sqrt{2} + 6 = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{-1 + 9}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۳۲- اگر  $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)$  باشد، حاصل  $f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$  کدام است؟

- (۱)  $2x$       (۲)  $\frac{2}{x}$       (۳)  $x^2 - 1$       (۴) صفر

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right) \Rightarrow 2y - x = \sqrt{x^2 + 4} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{طرفین به توان ۲}} 4y^2 - 4yx + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 4$$

$$\xrightarrow{\div 4} y^2 - yx = 1 \Rightarrow yx = y^2 - 1 \Rightarrow x = y - \frac{1}{y} \xrightarrow[\text{را عوض می کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y} f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - x = 0$$

۳۳- اگر  $f(x) = x^2 + x$  و  $g(x) = \sqrt{4x + 1}$  باشند، مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع  $g \circ f$  و خط به معادله‌ی

$y = 3$  کدام است؟

۶ (۴)

۴/۵ (۳)

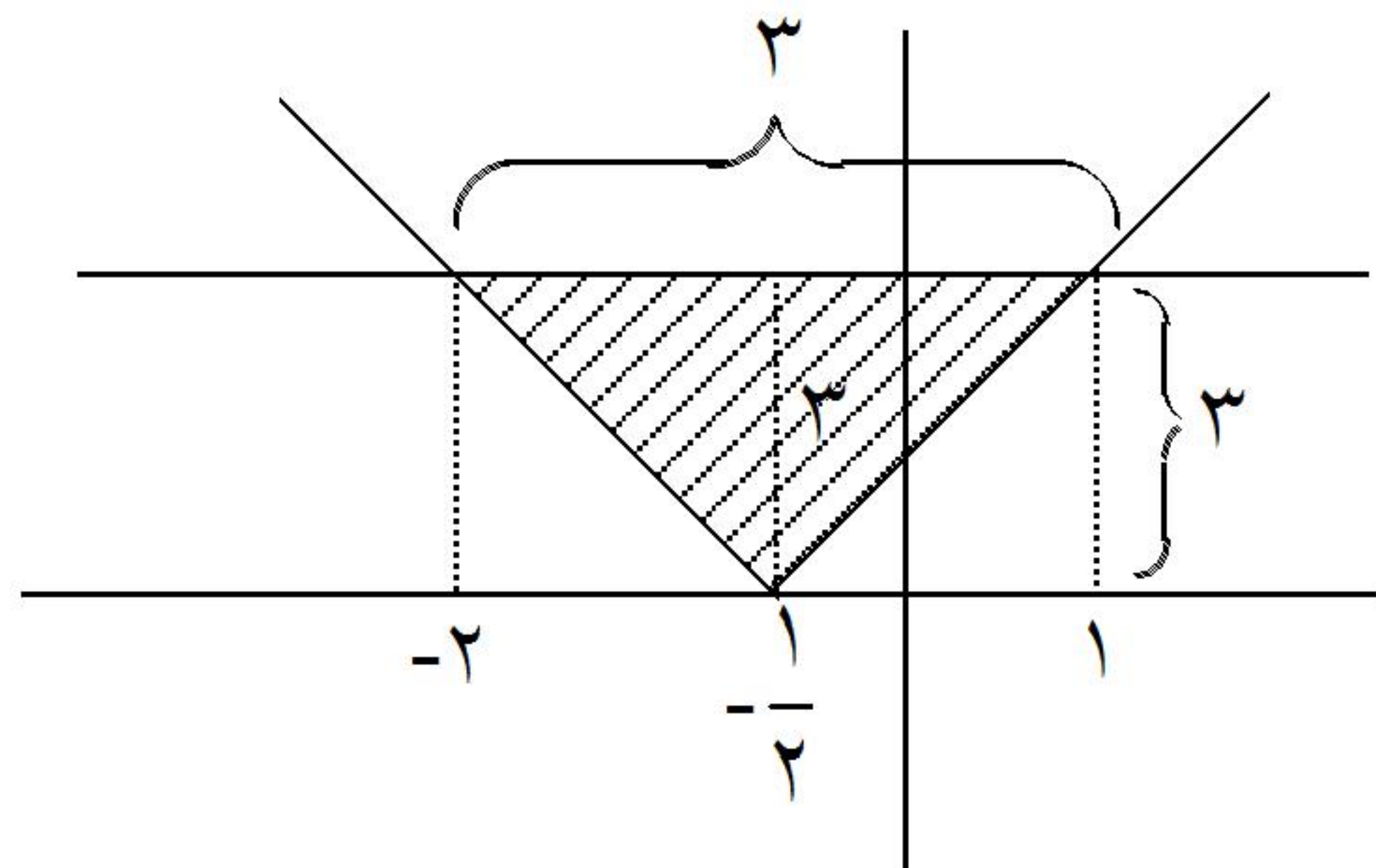
۴ (۲)

۳ (۱)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1|$$

$$|2x + 1| = 3 \rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \rightarrow x = 1 \\ 2x + 1 = -3 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$



$$S = 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = 4/5$$

۳۴- رابطه‌ی  $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$  چند عضو زوج مرتب دارد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

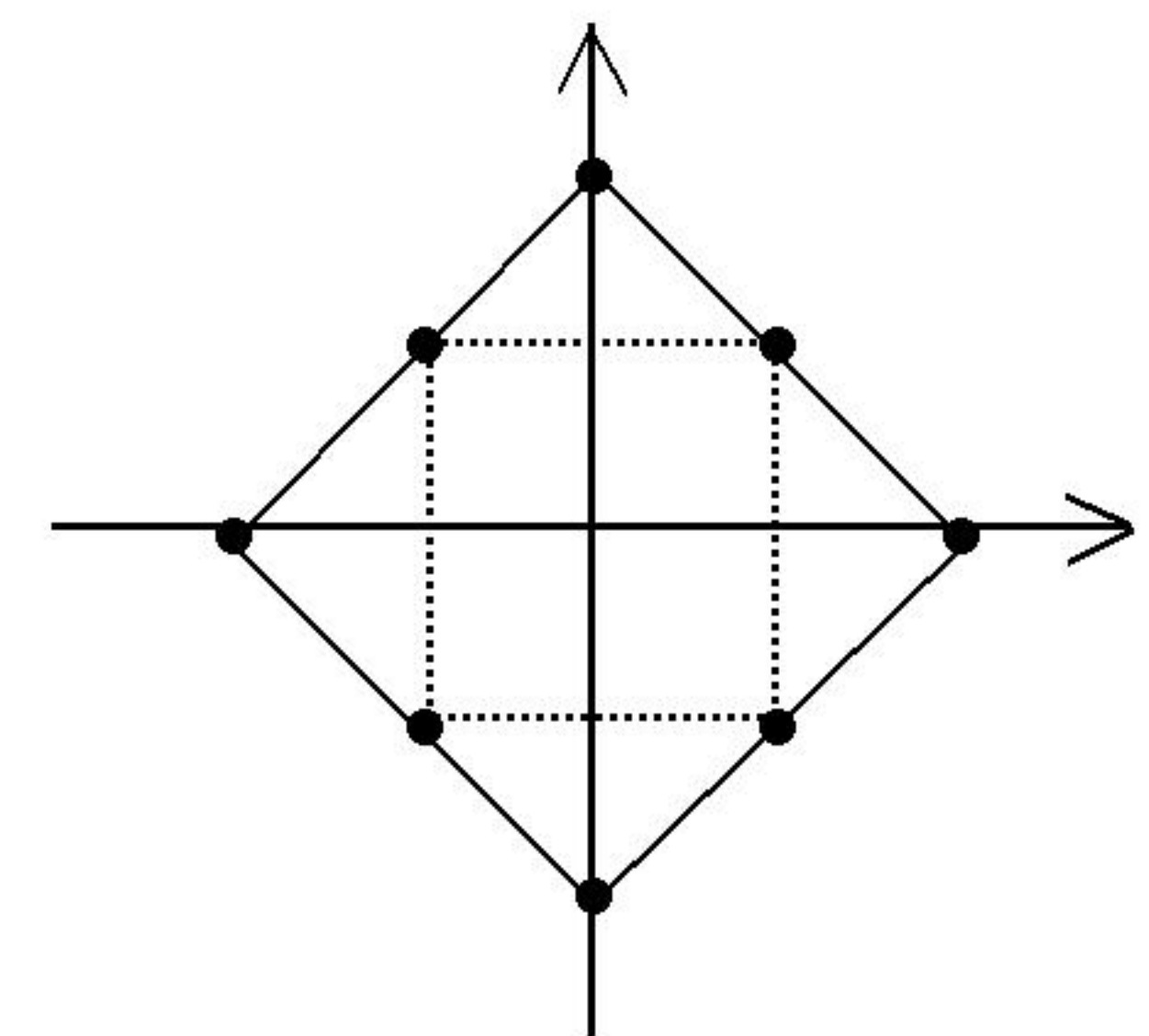
۶ (۲)

۴ (۱)

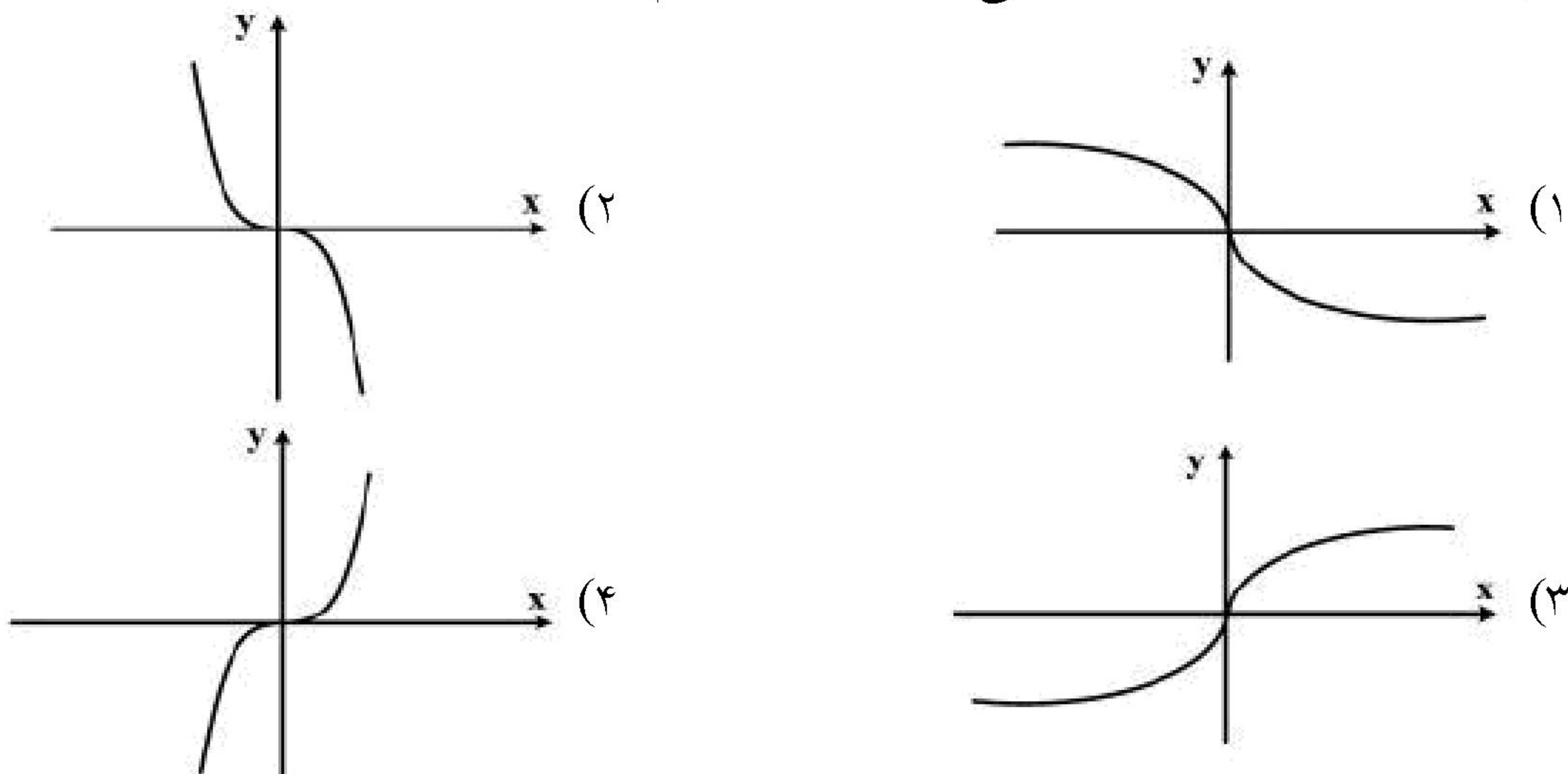
گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. نمودار  $|x| + |y| = 2$  معادله‌ی مربعی به ضلع  $2\sqrt{2}$  است. نقاط مشخص شده در

نمودار  $x \in \mathbb{Z}$  و  $y \in \mathbb{Z}$  می‌باشند. پس ۸ زوج دارد.

$$f = \{(0, 2), (0, -2), (1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1), (2, 0), (-2, 0)\}$$

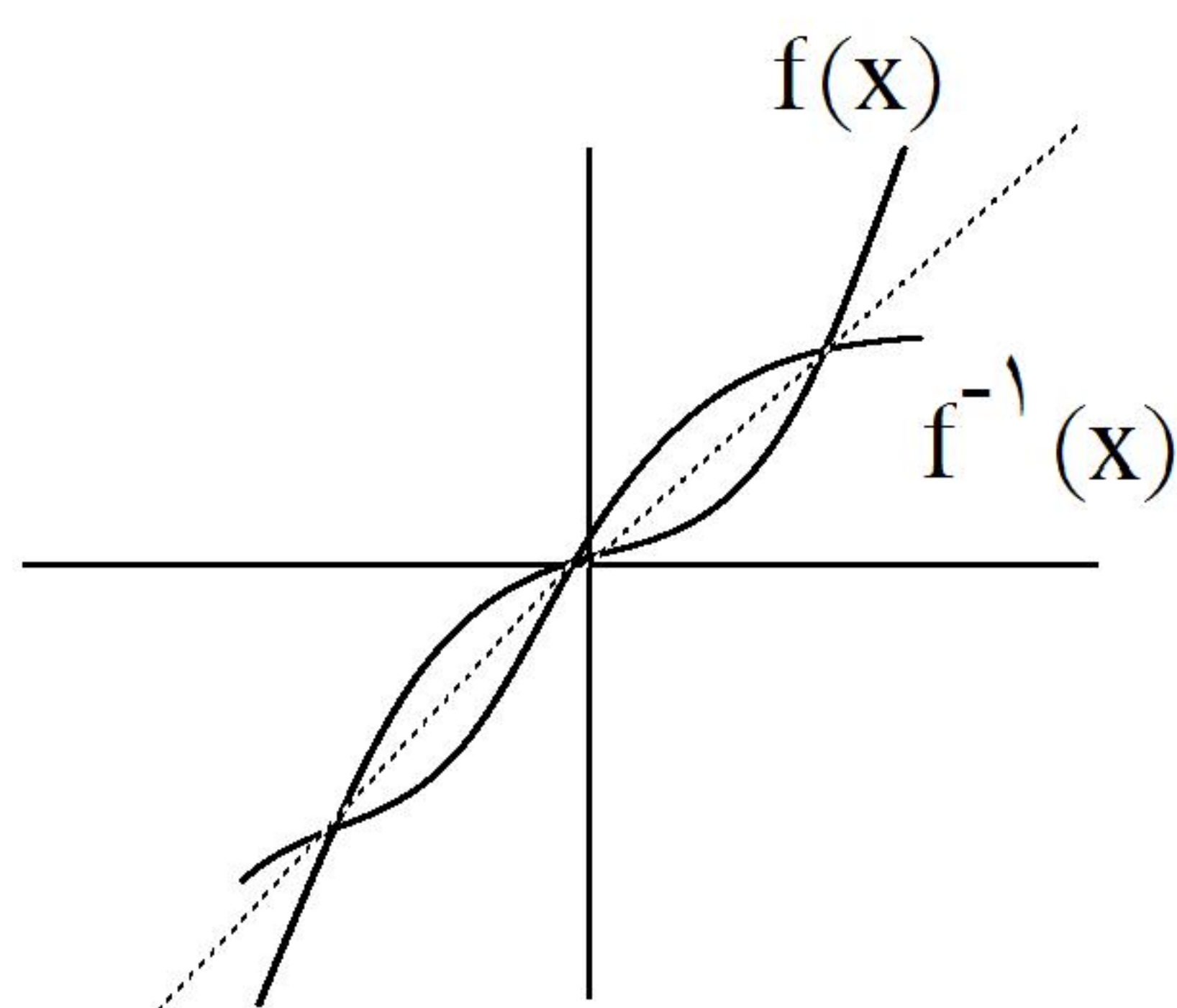


۳۵- اگر  $f(x) = x|x|$  باشد، نمودار تابع  $y = f^{-1}(x)$  کدام است؟



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



۳۶- اگر  $f(x) = (2x - 3)^2$  و  $g(x) = x + 2$  نمودارهای دو تابع  $f$  و  $fo g$ ، با کدام طول متقاطع اند؟

- (۱) -۱      (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳) ۱      (۴)  $\frac{3}{2}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$fo g = f \rightarrow (2x + 1)^2 = (2x - 3)^2 \rightarrow 2x + 1 = -(2x - 3) \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۳۷- ضابطه‌ی معکوس تابع  $y = 2 - \sqrt{x - 1}$ ، به کدام صورت است؟

- (۱)  $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$       (۲)  $y = -x^2 + 4x - 5; x \leq 2$   
 (۳)  $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$       (۴)  $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون  $\sqrt{x - 1}$  مثبت است، پس  $-\sqrt{x - 1}$  منفی بوده و  $y = 2 - \sqrt{x - 1}$  همواره کوچک‌تر مساوی ۲ می‌شود و بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس  $x \leq 2$  است.

$$y = 2 - \sqrt{x - 1} \rightarrow (\sqrt{x - 1})^2 = (2 - y)^2 \rightarrow x - 1 = 4 - 4y + y^2$$

$$\rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x^2 - 4x + 5$$

۳۸- در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x + 7}$  ، مقدار  $f(2 - \sqrt{3})$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x + 7} = \sqrt{-2(x^2 - 4x) + 7} = \sqrt{-2[(x-2)^2 - 4] + 7}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{-2(x-2)^2 + 15} \Rightarrow f(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{-2(2 - \sqrt{3} - 2)^2 + 15} = \sqrt{-6 + 15} = \sqrt{9} = 3$$

راه دوم:

$$f(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{2(2 - \sqrt{3})^2 + 8(2 - \sqrt{3}) + 7} = \sqrt{-8 - 6 + 8\sqrt{3} + 16 - 8\sqrt{3} + 7} = \sqrt{9} = 3$$

۳۹- اگر  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$  ، دامنه‌ی تابع  $f(3 - x)$  ، کدام است؟

- (۱)  $[0, 2]$  (۲)  $[0, 3]$  (۳)  $[1, 2]$  (۴)  $[1, 3]$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(2 - x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2] \rightarrow 0 \leq 3 - x \leq 2 \rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow x \in [1, 3]$$

۴۰- اگر  $f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x - 2}$  باشد،  $f(1 - \sqrt{2})$  ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳) ۲ (۴)  $1 + \sqrt{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x - 2} \Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = \frac{-2(1 - \sqrt{2})^2 + 5(1 - \sqrt{2})}{1 - \sqrt{2} - 2}$$

$$\Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = \frac{-2(1 + 2 - 2\sqrt{2}) + 5 - 5\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} - 2} = \frac{-6 + 4\sqrt{2} + 5 - 5\sqrt{2}}{-1 - \sqrt{2}} = \frac{-1 - \sqrt{2}}{-1 - \sqrt{2}} = 1$$

۴۱- تابع  $f(x) = \text{Log}_3(ax + b)$  فقط برای مقادیر  $x \in (-\frac{1}{3}, +\infty)$  با معنی است. اگر  $f(4) = 2$  باشد، آن گاه

$f(-\frac{4}{9})$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{دامنه: } ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \xrightarrow{x > -\frac{1}{3}} -\frac{b}{a} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = 3b$$

$$f(4) = 2 \Rightarrow 4a + b = 9 \Rightarrow 9b = 9 \Rightarrow b = 1, a = 3$$

$$f(x) = \text{Log}_3(3x + 1) \Rightarrow f(-\frac{4}{9}) = \text{Log}_3 \frac{1}{3} = \text{Log}_3 3^{-1} = -1$$

۴۲- اگر نمودار تابع  $f(x) = a(b)^x - 1$ ، از دو نقطه‌ی  $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  و  $B(1, 11)$  بگذرد،  $f(-1)$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow a(b)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}\sqrt{b}$$

$$f(1) = 11 \Rightarrow ab - 1 = 11 \rightarrow ab = 12 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\sqrt{b}\right)(b) = 12$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b} = 8 \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 64 \Rightarrow b = 4, a = 3$$

$$f(x) = 3 \times 4^x - 1 \Rightarrow f(-1) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

۴۳- از تساوی  $\text{Log}_x(x^2 + 4) = 1 + \text{Log}_x 5$  مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ۲، کدام است؟

- (۱) -۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_x(x^2 + 4) = \text{Log}_x x + \text{Log}_x 5 \Rightarrow \text{Log}_x(x^2 + 4) = \text{Log}_x 5x$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Log}_4 x = \text{Log}_4 4 = 1$$

۴۴- از معادله‌ی  $\text{Log}_3(x^2 - 1) = 1 + \text{Log}_3(x + 3)$  مقدار لگاریتم  $(x - 3)$  در مبنای ۴ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_3(x^2 - 1) = \text{Log}_3 3 + \text{Log}_3(x + 3)$$

$$\text{Log}_3(x^2 - 1) = \text{Log}_3(3x + 9) \Rightarrow x^2 - 1 = 3x + 9 \Rightarrow x^2 - 1 = 3x + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = 5 \Rightarrow \text{Log}_4(x - 3) = \text{Log}_4(5 - 3) = \text{Log}_4 2 = \frac{1}{2}$$

۴۵- اگر  $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم  $(4a + 1)$  در پایه‌ی ۴ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{3}{2}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\text{Log}_4(4a + 1) = \text{Log}_4\left(4 \times \frac{3}{4} + 1\right) = \text{Log}_4 4 = 1$$

۴۶- از معادله  $\frac{1}{3}\text{Log} 25 + \text{Log}(x - 3) = 2$  عدد  $x$  کدام است؟ (پایه لگاریتم ۱۰ می باشد.)

- ۱۲ (۱)      ۱۵ (۲)      ۱۸ (۳)      ۲۳ (۴)

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.  $\text{Log} 25^{\frac{1}{3}}(x - 3) = 2 \Rightarrow 5(x - 3) = 10^2 \Rightarrow x - 3 = 20 \Rightarrow x = 23$

نکته:  $\text{Log}_a^x = b \Rightarrow a^b = x$

۴۷- از دو معادله‌ی  $\text{Log}_3 x + \text{Log}_3 y = 2$  و  $x^2 + y^2 = 46$  لگاریتم  $(x + y)$  در پایه‌ی ۴، کدام است؟

- ۱/۵ (۱)      ۲ (۲)      ۲/۵ (۳)      ۳ (۴)

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.  $\text{Log}_3^x + \text{Log}_3^y = 2 \Rightarrow \text{Log}_3^{xy} = 2 \Rightarrow xy = 3^2 = 9$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 46 + 18 = 64 \Rightarrow x + y = 8$$

$$\text{Log}_4^8 = \frac{3}{2}$$

۴۸- اگر  $\text{Log}_3(2x - 1) = -2$  باشد، آنگاه لگاریتم  $(9x + 3)$  در پایه ۲ کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_3(2x - 1) = -2 \Rightarrow 2x - 1 = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow 2x = \frac{10}{9} \Rightarrow x = \frac{5}{9}$$

$$\text{Log}_2(9x + 3) = \text{Log}_2\left(9\left(\frac{5}{9}\right) + 3\right) = \text{Log}_2 8 = \text{Log}_2 2^3 = 3 \text{Log}_2 2 = 3 \times 1 = 3$$

۴۹- اگر  $\text{Log} 2 = k$  باشد، حاصل  $\text{Log}(6 - 2\sqrt{5}) + 2\text{Log}(1 + \sqrt{5})$ ، کدام است؟

- ۲k (۱)      ۴k (۲)      ۱ + k (۳)      ۲ + ۴k (۴)

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \text{Log} 16 = \text{Log} 2^4 = 4 \text{Log} 2 = 4k$$

تذکر:  $2\text{Log}(1 + \sqrt{5}) = \text{Log}(1 + \sqrt{5})^2 = \text{Log}(6 + 2\sqrt{5})$

۵۰- اگر لگاریتم عدد  $2\sqrt[3]{0.25}$  در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد  $(\frac{1}{A} - 1)$  در پایه ۴ کدام است؟

- ۱/۳ (۱)      ۱/۳ (۲)      ۲/۳ (۳)      ۳/۲ (۴)

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \text{Log}_8 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \text{Log}_3 2 \times 2^{\frac{-2}{3}} = \text{Log}_3 2^{+\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

$$\text{Log}_4\left(-1 + \frac{1}{A}\right) = \text{Log}_4(-1 + 9) = \text{Log}_4^8 = \text{Log}_{\frac{1}{4}}^2 = \frac{3}{2}$$

۵۱- اگر  $f(x) = \sqrt{3-x}$  و  $g(x) = \text{Log}_r(x^2+2x)$  باشند، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟

- (۱)  $[-۴, ۲]$  (۲)  $[۰, ۲]$  (۳)  $[-۴, -۱] \cup (۱, ۲]$  (۴)  $[-۴, -۲) \cup (۰, ۲]$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی  $f(g(x))$  را بدون ساده کردن می‌یابیم.

$$f(g(x)) = f(\text{Log}_r(x^2+2x)) = \sqrt{3 - \text{Log}_r(x^2+2x)}$$

حالا دامنه را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{Log}_r(x^2+2x) : x^2+2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 0 \quad (۱)$$

$$\sqrt{3 - \text{Log}_r(x^2+2x)} : 3 - \text{Log}_r(x^2+2x) \geq 0 \Rightarrow \text{Log}_r(x^2+2x) \leq 3 \Rightarrow x^2+2x \leq r^3$$

$$\Rightarrow x^2+2x-8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \quad (۲)$$

$$D_{\text{fog}} = [-۴, -۲) \cup (۰, ۲]$$

از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

۵۲- جواب معادله‌ی لگاریتمی  $\text{Log } x - \text{Log } (x-2) = 2 \text{Log } \sqrt{3} + \frac{1}{3} \text{Log } 8$  کدام است؟

- (۱)  $1/8$  (۲)  $2/4$  (۳)  $2/8$  (۴)  $3/6$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.  $\text{Log } x - \text{Log } (x-2) = 2 \log \sqrt{3} + \frac{1}{3} \text{Log } 8$

$$\Rightarrow \text{Log } x - \text{Log } (x-2) = \text{Log} \left( \sqrt{3} \right)^2 + \text{Log } 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \text{Log} \frac{x}{x-2} = \text{Log } 3 \times 2 \Rightarrow \frac{x}{x-2} = 6 \Rightarrow 6x - 12 = x \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5} = 2/4$$

۵۳- اگر  $3^a = A$  باشد،  $\text{Log}_3 9A^2$  کدام است؟

- (۱)  $2+2a$  (۲)  $3+2a$  (۳)  $2+a^2$  (۴)  $3+a^2$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_3 9A^2 = \text{Log}_3 9 + \text{Log}_3 A^2 = 2 + 2 \text{Log}_3 A = 2 + 2 \text{Log}_3 3^a = 2 + 2a$$

۵۴- در تابع با ضابطه  $f(x) = a \cdot b^x$ ;  $b > 0$  داریم  $f(0) = \frac{3}{2}$  و  $f(-2) = \frac{3}{32}$  مقدار  $f\left(\frac{3}{2}\right)$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲۴ (۳) ۱۲ (۴) ۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = a \cdot b^x, \quad b > 0$$

$$f(0) = a \times b^0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, \quad f(-2) = ab^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} b^{-2} = \frac{3}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{16} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$



۵۵- اگر  $\text{Log}_6(x-5) = 2 - \text{Log}_6 x$  باشد  $\text{Log}_2(x-1)$  کدام است؟

- (۱) -۱      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_6^{(x-5)} = 2 - \text{Log}_6^x \Rightarrow \text{Log}_6^{(x-5)} + \text{Log}_6^x = 2 \Rightarrow \text{Log}_6^{(x-5)x} = 2 \Rightarrow x^2 - 5x = 6^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 36 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-4 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$\xrightarrow{x=9} \text{Log}_2^{x-1} = \text{Log}_2^{(9-1)} = \text{Log}_2^8 = \text{Log}_2 2^3 = 3$$

۵۶- از معادله‌ی  $\text{Log}(x^2 - 9) = \text{Log}(x+3) + 2\text{Log}3$  مقدار  $x$  کدام است؟

- (۱) ۶      (۲) ۷      (۳) ۸      (۴) ۱۲

$$\text{Log}(x^2 - 9) = \text{Log}(x+3) + \text{Log} 3^2 \quad \text{گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.}$$

$$\text{Log}(x^2 - 9) = \text{Log} 9(x+3) \Rightarrow x^2 - 9 = 9x + 27 \Rightarrow x^2 - 9x - 36 = 0 \Rightarrow (x-12)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=-3 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

۵۷- اگر لگاریتم  $a$  در پایه  $\sqrt{3}$  برابر  $\frac{4}{3}$  باشد، آن‌گاه لگاریتم  $(a^3 + 7)$  در پایه ۸ کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$       (۲)  $\frac{4}{3}$       (۳)  $\sqrt{2}$       (۴)  $\frac{3}{2}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_{\sqrt{3}} a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\sqrt{3})^{\left(\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow a = 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a^3 = 9 \Rightarrow a^3 + 7 = 16$$

$$\text{Log}_8(a^3 + 7) = \text{Log}_8(9+7) = \text{Log}_8 16 = \frac{4}{3}$$

۵۸- خلاصه شده‌ی عبارت  $\text{Log} 35 + 2\text{Log} 2\sqrt{7} - \text{Log} 200 - 2\text{Log} 7$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$       (۲) -۲      (۳)  $-\frac{5}{4}$       (۴) -۱

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log} 35 + 2\text{Log} 2\sqrt{7} - \text{Log} 200 - 2\text{Log} 7 = \text{Log} 35 + \text{Log} (2\sqrt{7})^2 - \text{Log} 200 - \text{Log} 7^2$$

$$= \text{Log} 35 + \text{Log} 28 - \text{Log} 200 - \text{Log} 49 = \text{Log} \frac{35 \times 28}{200 \times 49} = \text{Log} \frac{1}{10} = \text{Log} 10^{-1} = -\text{Log} 10 = -1$$

۵۹- اگر  $\text{Log} 3 + \text{Log} \sqrt[4]{3} = \text{Log} (81)^k$  ، آن‌گاه لگاریتم  $\frac{5}{k}$  در پایه‌ی ۲ کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

$$\text{Log} 3 + \text{Log} \sqrt[4]{3} = \text{Log} (81)^k \quad \text{گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.}$$

$$\text{Log} 3 \sqrt[4]{3} = \text{Log} 3^{4k} \Rightarrow 3^{1+\frac{1}{4}} = 3^{4k} \Rightarrow k = \frac{5}{16} \Rightarrow \text{Log}_2 \frac{5}{k} = \text{Log}_2 \frac{16}{5} = 4$$

۶۰- اگر  $\text{Log}(x^2 - 11) = 1 + \text{Log } x$  باشد،  $\text{Log}(x - 1)$  کدام است؟

- (۱) ۰ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴) ۲

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}(x^2 - 11) - \text{Log } x = 1 \rightarrow \text{Log} \frac{x^2 - 11}{x} = 1 \rightarrow \frac{x^2 - 11}{x} = 10$$

$$\rightarrow x^2 - 11 = 10x \rightarrow x^2 - 10x - 11 = 0$$

$$(x - 11)(x + 1) = 0 \quad \begin{cases} \text{ق ق } x - 11 = 0 \rightarrow x = 11 \\ \text{غ ق ق } x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Log}(x - 1) = \text{Log}(11 - 1) = \text{Log } 10 = 1$$

۶۱- حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$  با فرض  $\tan 15^\circ = 0/28$ ، کدام است؟

- (۱)  $-\frac{16}{9}$  (۲)  $-\frac{9}{16}$  (۳)  $\frac{9}{16}$  (۴)  $\frac{16}{9}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اول نسبت‌ها را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\cos(285^\circ) = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\sin(255^\circ) = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin(525^\circ) = \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\sin(105^\circ) = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\text{عبارت اصلی: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

با توجه به این که مقدار  $\tan 15^\circ$  را داریم، صورت و مخرج کسر را بر  $\cos 15^\circ$  تقسیم می‌کنیم:

$$\text{کسر} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} \xrightarrow{\tan 15^\circ = 0/28} \frac{0/28 + 1}{0/28 - 1} = \frac{1/28}{-0/72} = \frac{-16}{9}$$

۶۲- ساده شده‌ی عبارت  $\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\sin 20^\circ$  (۲)  $\cos 20^\circ$  (۳)  $2 \sin 20^\circ$  (۴)  $2 \cos 20^\circ$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) = \cos 50^\circ \times \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos 50^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ$$

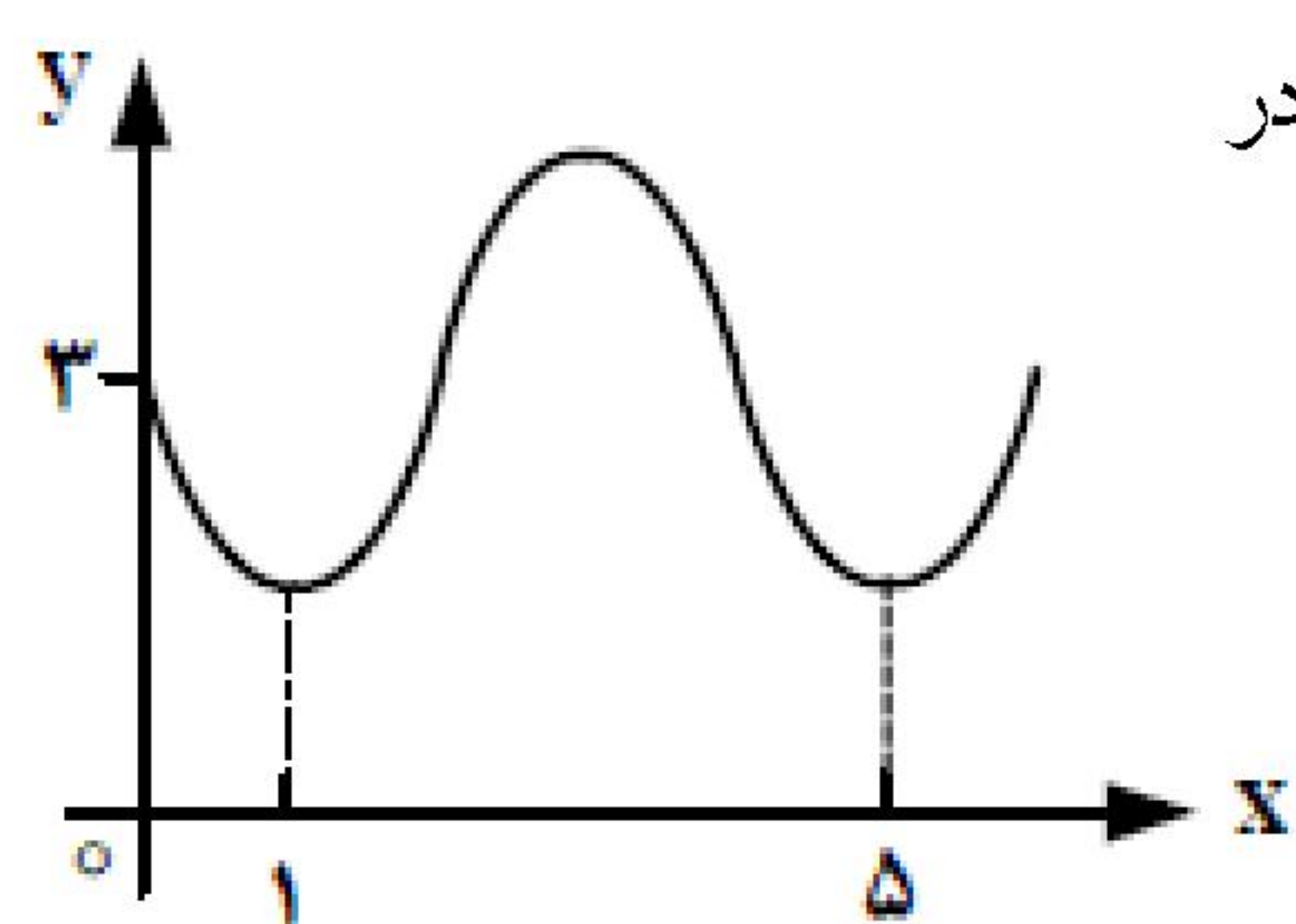
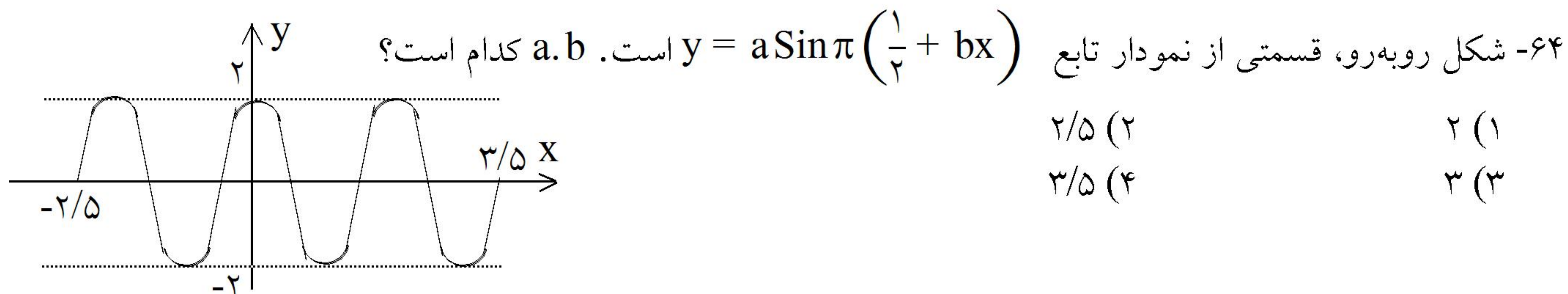
۶۳- اگر  $\tan \theta = 0/2$  باشد، مقدار  $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲)  $1/2$  (۳) ۲ (۴) ۳

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \theta$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{2} = \frac{2}{4} + \frac{10}{4} = \frac{12}{4} = 3$$



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = a + \sin(b\pi x)$$

$$f(0) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 5 - 1 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \quad (\text{چون تابع در ابتدا نزولی است})$$

$$f(x) = 3 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \rightarrow f\left(\frac{25}{3}\right) = 3 - \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

۶۶- اگر  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$  باشد، مقدار  $\cos 2x$ ، کدام است؟

$\frac{2}{9}$  (۴)       $\frac{1}{9}$  (۳)       $-\frac{1}{9}$  (۲)       $-\frac{2}{9}$  (۱)

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow (\cos x) \left(\frac{1}{2}\right) - (\sin x) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\cos x) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+ (\sin x) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}$$

۶۷- اگر  $\tan \frac{2\pi}{3} \sin \left( \frac{3\pi}{2} - x \right) = 1$  باشد، مقدار  $\cos 2x$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\tan \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \sin \left( \frac{3\pi}{2} - x \right) = 1 \Rightarrow -\tan \frac{\pi}{3} (-\cos x) = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \left( \frac{1}{3} \right) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

۶۸- اگر  $\tan \beta = \frac{1}{2}$  و  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$  باشند، مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

- (۱)  $0/45$  (۲)  $0/6$  (۳)  $0/75$  (۴)  $0/8$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \beta + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\tan \beta + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \beta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{6}{1 + 9} = 0/6$$

۶۹- اگر  $a + b = \frac{\pi}{4}$  باشد، حاصل  $\cos a \cos b \cos \left( \frac{\pi}{2} - a \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} - b \right)$  کدام است؟

- (۱)  $\sin 4a$  (۲)  $\cos 4a$  (۳)  $\sin^2 2a$  (۴)  $\cos^2 2a$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\cos a \cos b \sin a \sin b = 2(\cos a \cos b \sin a \sin b) = 2(\sin 2a \sin 2b) =$$

$$2 \sin 2a \sin 2 \left( \frac{\pi}{4} - a \right) = 2 \sin 2a \sin \left( \frac{\pi}{2} - 2a \right) = \sin 4a$$

۷۰- مقدار عبارت  $\sin \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right)$  کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $1$

یادآوری:  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$   $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$

$$\sin \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = \left( -\sin \frac{\pi}{4} \right) \left( -\cos \frac{\pi}{4} \right) = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

پس:

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۷۱- حاصل عبارت  $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴) ۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{می دانیم } \begin{cases} \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= \cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

۷۲- ساده شده عبارت  $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$  کدام است؟

- (۱)  $\cos \alpha - \sin \alpha$  (۲)  $\cos 2\alpha$  (۳)  $1 + \sin 2\alpha$  (۴)  $1 - \sin 2\alpha$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right] \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right] \\ &= 2 \times \sqrt{\frac{2}{2}} \times \sqrt{\frac{2}{2}} \times (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha \end{aligned}$$

۷۳- اگر  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$  باشد مقدار  $\text{gof}\left(\frac{\pi}{4}\right)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳) ۱ (۴)  $\sqrt{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{gof}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۷۴- حاصل  $\cos 165^\circ \cos 105^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

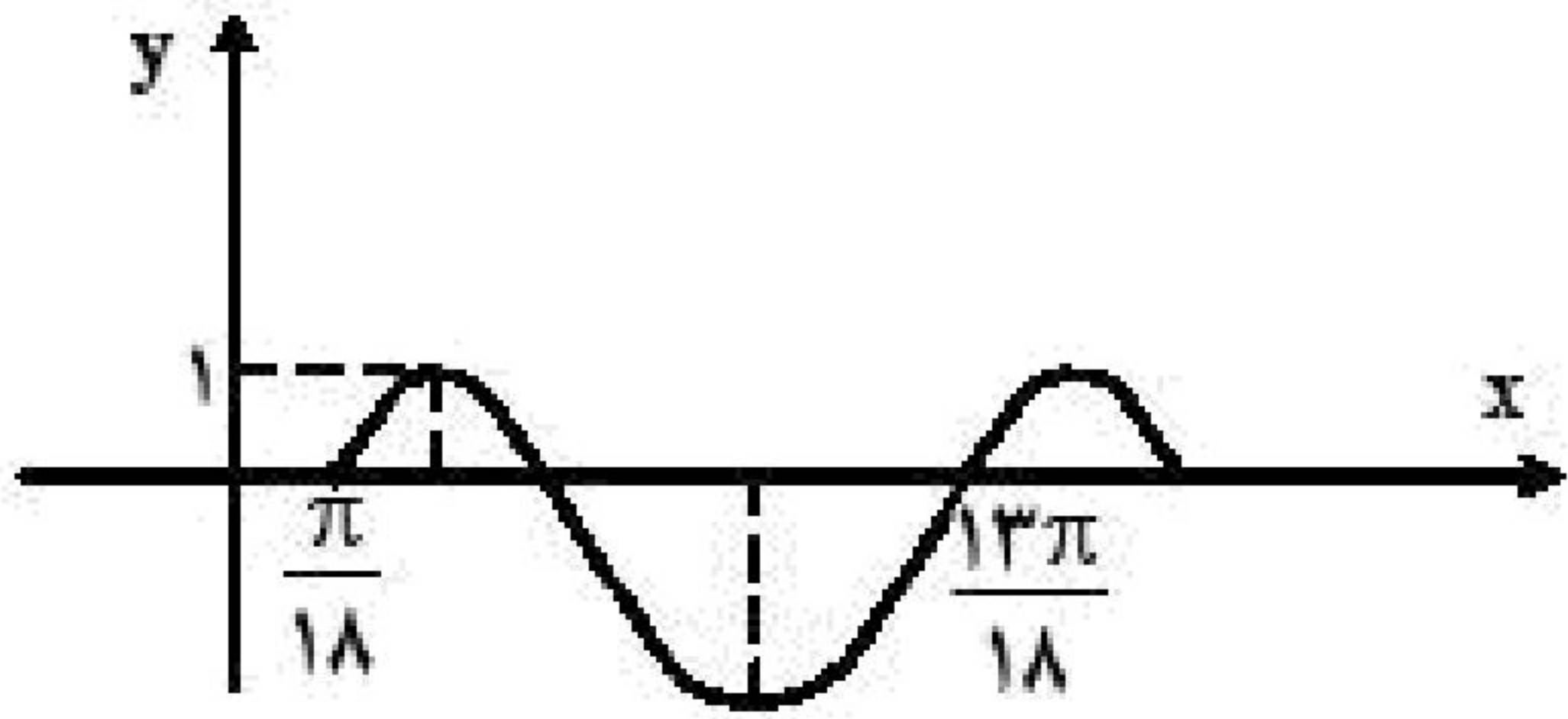
۷۵- خلاصه شده عبارت  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha)\cos(-\alpha)$  کدام است؟

- (۱)  $-\sin 2\alpha$  (۲)  $\sin 2\alpha$  (۳)  $\cos 2\alpha$  (۴) ۰

$$\cos\alpha(-\sin\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha = -2\sin\alpha\cos\alpha = -\sin 2\alpha$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۷۶- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$  است.  $a + b$  کدام است؟



(۱)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = a + 2 \sin(bx)$$

$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = 3$$

با توجه به ضریب ۲، Sin باید بین ۲ و -۲ باشد و چون نمودار دارای ماکزیمم یک است بنابراین نمودار یک واحد پایین آمده است در نتیجه  $a = -1$  است.

$$a + b = -1 + 3 = 2$$

۷۷- اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  و  $g(x) = \operatorname{tg} x$  ضابطه تابع  $f \circ g(x)$  در بازه  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  برابر کدام است؟

(۴)  $-\cos x$

(۳)  $-\sin x$

(۲)  $\cos x$

(۱)  $\sin x$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ g(x) = \operatorname{tg} x \end{array} \right\} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \operatorname{tg} x \sqrt{\cos^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot |\cos x| = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot |\cos x| \left. \begin{array}{l} \Rightarrow f \circ g(x) = \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} (-\cos x) = -\sin x \\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0 \end{array} \right\}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۷۸- عبارت  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \times \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$  برابر کدام است؟

(۴)  $\operatorname{Cotg} \frac{\alpha}{2}$

(۳)  $\operatorname{Cotg} \alpha$

(۲)  $\operatorname{tg} \alpha$

(۱)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \times \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{[1 + (2\cos^2 \alpha - 1)][1 + \cos \alpha]} = \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha)} \\ &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

۷۹- حاصل  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right) + \sin^2 a$  کدوم است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴) ۱

می دانیم  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta)$  پس:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + a\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right) + \sin^2 a = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2a\right) - \frac{1}{2} \sin\frac{\pi}{6} + \sin^2 a =$$

$$\frac{1}{2} \cos 2a - \frac{1}{4} + \sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 a) - \frac{1}{4} + \sin^2 a = \frac{1}{2} - \sin^2 a - \frac{1}{4} + \sin^2 a = \frac{1}{4}$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

۸۰- حاصل  $\sqrt{2} \left[ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]$  کدوم است؟

- (۱)  $\cos x$  (۲)  $2 \cos x$  (۳)  $\sin x$  (۴)  $2 \sin x$

عبارت را ساده می کنیم داریم:  $\sqrt{2} \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} + \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} =$

$$\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x + \cos - \sin x) = 2 \cos x$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۸۱- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$  ، کدوم است؟

- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{4}$  (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. روش اول: (قانون هوییتال)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 2x + \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 2x}{2x} + \frac{\sin x}{2x} \times \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} \xrightarrow{\sqrt{\cos x} = t} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - t}{1 - t^4}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^3+t^2+t+1)}{-(t-1)(t+1)(t^2+1)} = -\frac{3}{4}$$

۸۲- حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4}$  ، کدام است؟

$\frac{7}{12}$  (۴)       $\frac{5}{12}$  (۳)       $-\frac{5}{12}$  (۲)       $-\frac{7}{12}$  (۱)

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{(x+2)(2x+1)} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 6 - 8x - 4}{(x+2)(2x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} -5 \frac{(x+2)}{(x+2)(2x+1)(x-2)} = \frac{-5}{(-3)(-4)} = \frac{-5}{12}$$

۸۳- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}{1 - \cos x}$  کدام است؟

$\frac{4}{4}$  (۴)       $\frac{3}{3}$  (۳)       $\frac{2}{2}$  (۲)       $\frac{1}{1}$  (۱)

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}{1 - \cos x} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{3\sin 3x}{2\sqrt{\cos 3x}}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{2} + \frac{9x}{2}}{x} = 4$$

۸۴- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$  کدام است؟

$\frac{2}{2}$  (۴)       $\frac{1}{3}$  (۳)       $\frac{1}{2}$  (۲)       $-\frac{2}{1}$  (۱)

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{HOP}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{-2 \sin 2x} = \frac{2(-1)(1+1)}{-2(-1)} = -2$$

۸۵- در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & ; x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & ; x \leq 0 \end{cases}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$  کدام است؟

$\frac{4}{4}$  موجود نیست.       $\frac{3}{3}$  صفر       $\frac{2}{2}$  (۲)       $-\frac{1}{1}$  (۱)

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0^-(-1) = 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = f(0^+) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x} = 1$$



۸۶- حد عبارت  $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$  وقتی  $x \rightarrow 2^-$  کدام است؟

- (۱) -۳      (۲) -۲      (۳) ۲      (۴) ۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وقتی  $x \rightarrow 2^-$  آن گاه  $x^2 - x - 2 < 0$  پس  $|x^2 - x - 2| = -(x^2 - x - 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$$

۸۷- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$  کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

- (۱) -۳      (۲) ۳      (۳) صفر      (۴) حد ندارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$[2x] + [-2x] = \begin{cases} 0 & x = \frac{k}{2} \\ -1 & x \neq \frac{k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x) + \cancel{\cos^3 x}}{(1 - \sqrt{1-x^2})(1 + \sqrt{1+x^2})} \times (1 + \sqrt{1+x^2})$$

$$= -1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{-x} = -1 \times \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

۸۸- حد عبارت  $[\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos^3 x + [tg^2 x]$  وقتی  $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$  کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) حد ندارد

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که درون جزء صحیح عدد صحیح می شود باید حد راست و چپ را جدا حساب کرد.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} [\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos^3 x + [tg^2 x] = [0^+](-1) + [3^+] = 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} [\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos^3 x + [tg^2 x] = [0^-](-1) + [3^-] = 1 + 2 = 3$$

چون حد راست و چپ برابر ۳ است بنابراین حاصل حد ۳ می شود.

۸۹- اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = 3$  باشد، آن گاه حدّ این کسر وقتی  $x \rightarrow 3$  کدام است؟

$x \rightarrow +\infty$

۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = \frac{a}{-1} = 3 \rightarrow a = -3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = \frac{0}{0}$$

$x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow 3$

$$\xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = 4$$

$x \rightarrow 3$

۹۰- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x}$  ، کدام است؟

$x \rightarrow \pi$

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x \times \cos(1 + \cos x)}{2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x \times 1}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{4}$$

$x \rightarrow \pi$

$x \rightarrow \pi$

راه دوم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{2(1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2(1 - \cos x)} = \frac{1}{4}$$

$x \rightarrow \pi$

$x \rightarrow \pi$

$x \rightarrow \pi$

$x \rightarrow \pi$

۹۱- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}}$  کدام است؟

$x \rightarrow \frac{1}{4}$

$2\pi$  (۴)

$\pi$  (۳)

$-\pi$  (۲)

$-2\pi$  (۱)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۹۲- در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = (x + a)[x]$  اگر  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$  باشد، عدد حقیقی  $a$  کدام است؟

$x \rightarrow 2^+$

$x \rightarrow 2^-$

صفر (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f(x) = (x + a)[x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \Rightarrow 2(2 + a) - (2 + a) = 3 \Rightarrow a = 1$$

$x \rightarrow 2^+$

$x \rightarrow 2^-$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۹۳- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$  ، کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{3}{2}$       (۳) ۱      (۴)  $\frac{1}{2}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos \alpha \sim 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$\alpha \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) - \left(1 - \frac{4x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + 2x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$$

۹۴- اگر  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 2^a$  باشد، آن‌گاه  $a$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$       (۲)  $-\frac{1}{4}$       (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}} = 2^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۹۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{4x-8} - \frac{1}{x^2-4} \right)$  ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{8}$       (۲)  $\frac{3}{16}$       (۳)  $\frac{1}{8}$       (۴)  $\frac{1}{16}$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{4(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4(x+2)} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$$

۹۶- اگر  $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$  ، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) -۴      (۲) -۳      (۳) -۲      (۴) -۱

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) = 1 + 2a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow (1 + 2a) - (a - 1) = -1 \Rightarrow a = -1 - 2 = -3$$

۹۷- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{|x^2 - 1|}$  کدام است؟

- (۱)  $-\pi$       (۲)  $-\frac{\pi}{2}$       (۳)  $\frac{\pi}{2}$       (۴)  $\pi$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حل با قاعده‌ی هوییتال:

۹۸- حدّ عبارت  $\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3x-4}{x^2-2x}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) -۲      (۳)  $\frac{1}{2}$       (۴)  $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+2}{x(x+1)} - \frac{3x-4}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4 - (x+1)(3x-4)}{x(x+1)(x-2)}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-2x^2 + x}{x(x+1)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{2}$$

۹۹- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 - \sqrt{4 - x^2}}$  کدام است؟

- (۱) ۸      (۲) ۱۲      (۳) ۱۶      (۴) ۱۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{+2 \sin 2x \sin x}{(4 - 4 + x^2)} \times (2 + 2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \sin 2x \sin x}{x^2} \simeq 8 \times 2 = 16$$

$x \rightarrow 0$

۱۰۰- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{tg } \pi x}{x^2 - \sqrt{x}}$  کدام است؟

$x \rightarrow 1$

$$-\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x^2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

$x \rightarrow 1$

$$H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(1 + \tan^2 \pi x)}{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

$x \rightarrow 1$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.