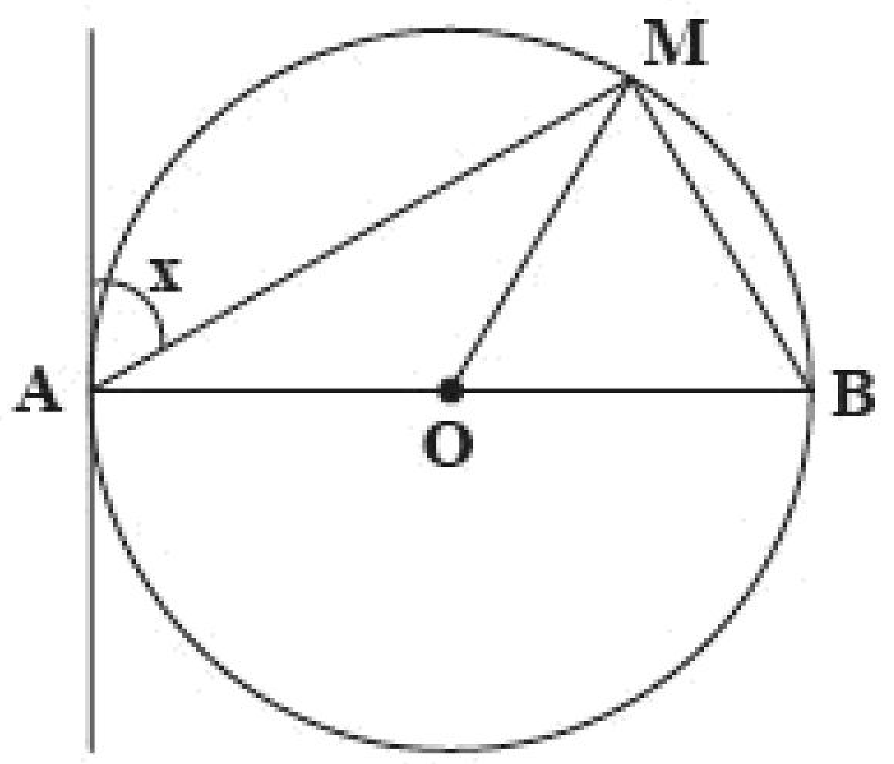
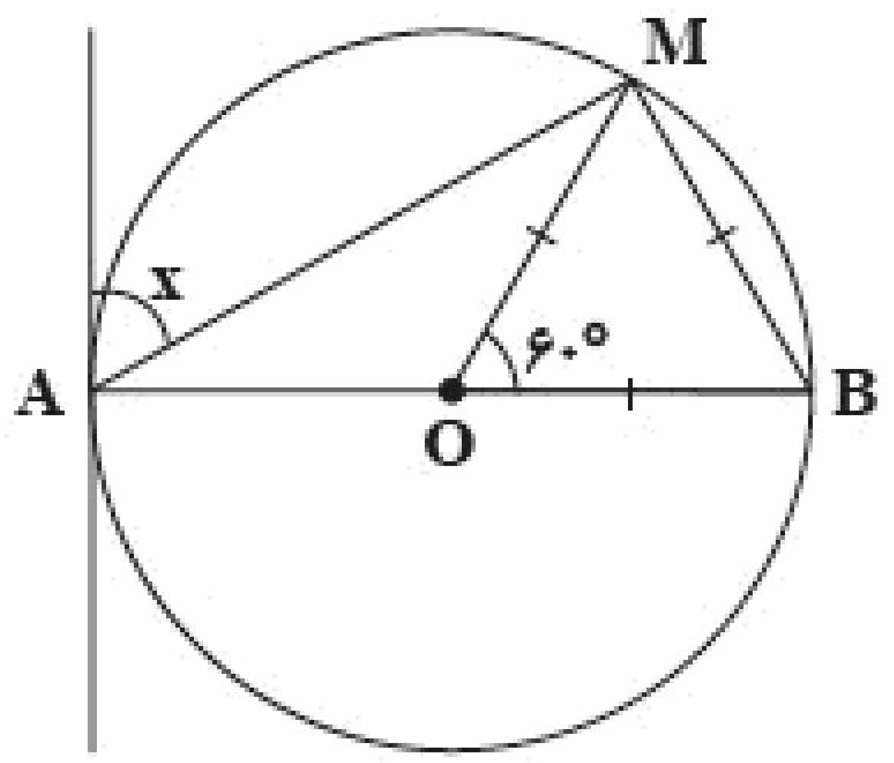
۱- در شکل مقابل، AB قطر دایره و مثلث OMB متساوی‌الاضلاع است. اندازه ی زاویه‌ی ظلّی کدام است؟



۱) ۳۰°
۲) ۶۰°
۳) ۷۰°
۴) ۷۵°

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی برابر کمان روبه‌رویش و اندازه‌ی زاویه‌ی ظلّی نصف کمان روبه‌رویش است.



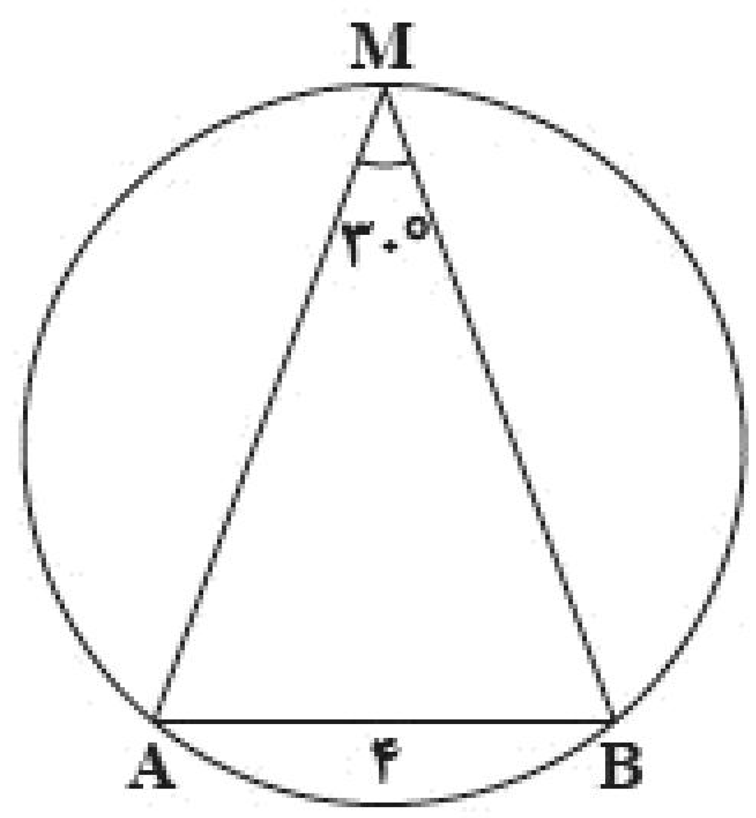
$\overset{\triangle}{OMB}$ متساوی الاضلاع $\Rightarrow M\hat{O}B = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{MB} = ۶۰^\circ$

$\overset{\frown}{AB} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$

$\overset{\frown}{AM} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$

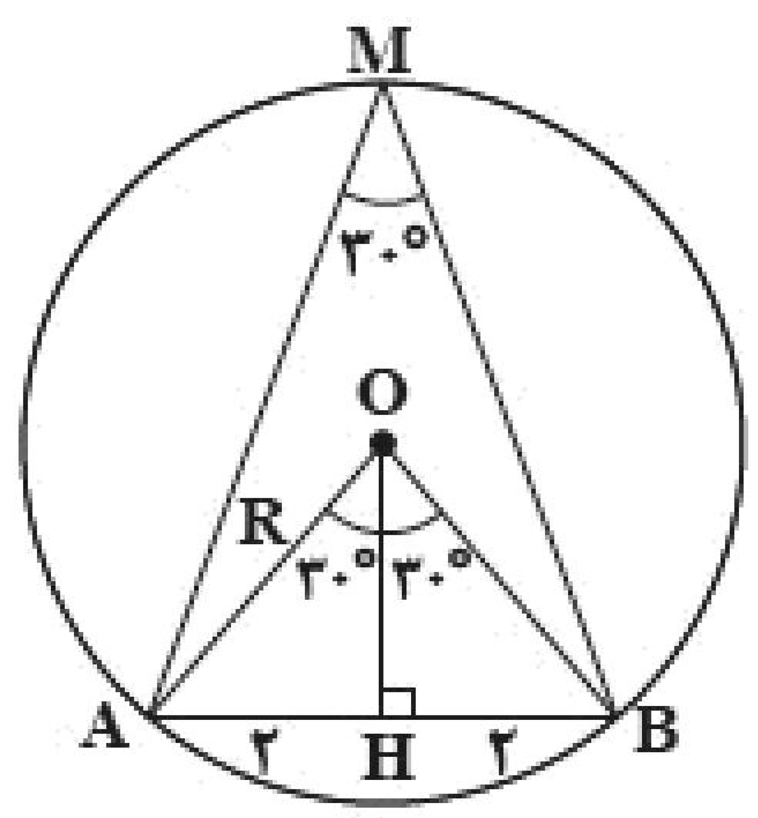
زاویه ضلی $x = \frac{\overset{\frown}{AM}}{۲} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$

۲- در شکل زیر اندازه‌ی وتر AB برابر ۴ و اندازه‌ی زاویه‌ی M برابر ۳۰° است. شعاع این دایره کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

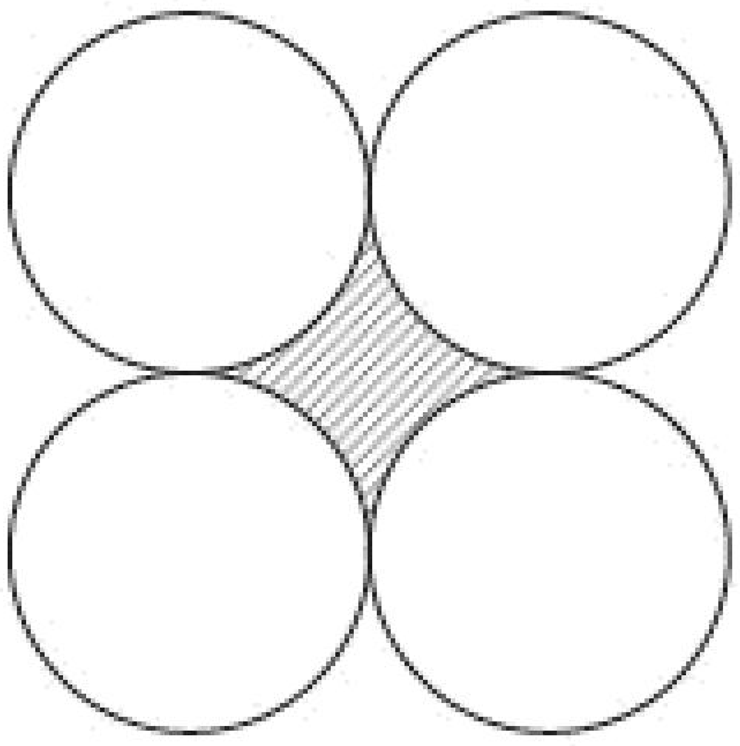
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز دایره بر وتر AB عمود رسم می‌کنیم.



$H\hat{O}A = \frac{۱}{۲}A\hat{O}B = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB} = \frac{۱}{۲}\times(۲\times۳۰^\circ) = ۳۰^\circ$

$\overset{\triangle}{OAH} : \sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{R} = \frac{۲}{R} \Rightarrow \frac{۲}{R} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow R = ۴$

۳- چهار دایره به شعاع ۲ مطابق شکل، دوبه‌دو مماس بر هم هستند. مساحت قسمت هاشور زده کدام است؟



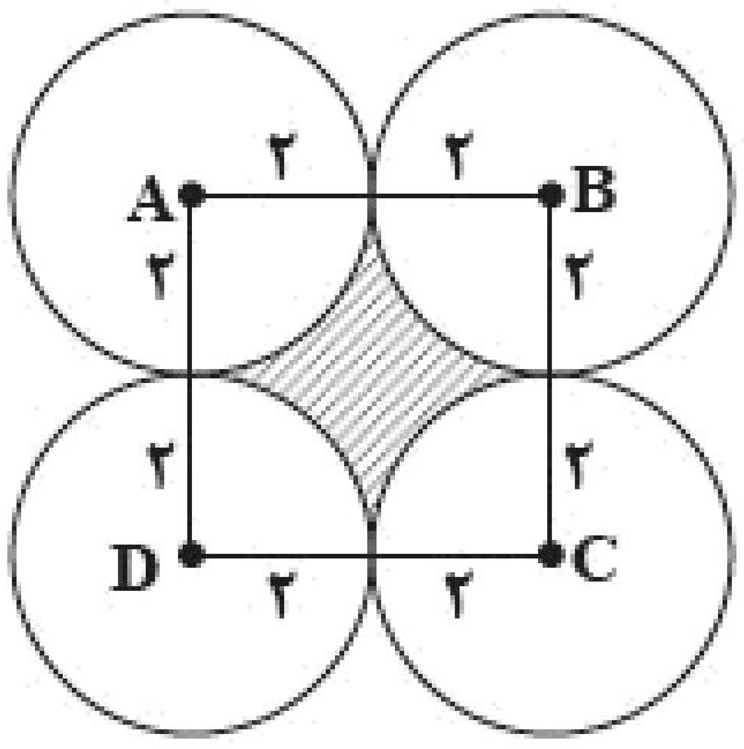
۱) $۸ - ۲\pi$

۲) $۴ - \pi$

۳) $۱۲ - ۴\pi$

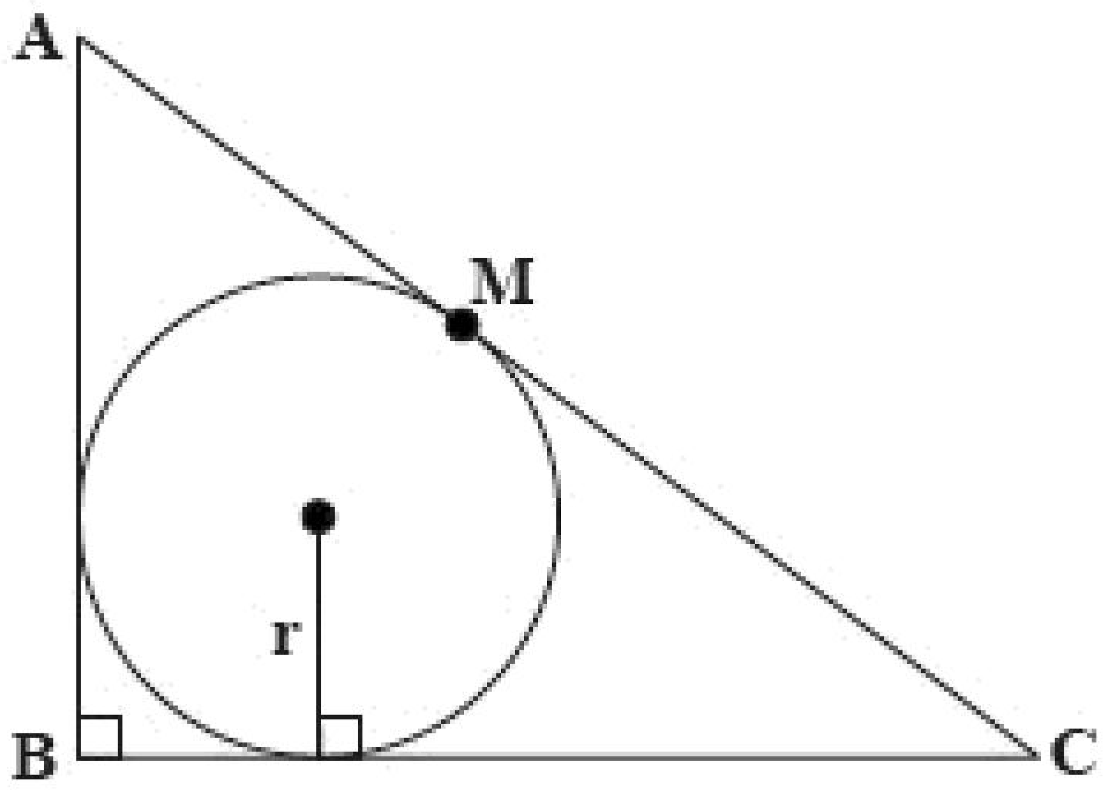
۴) $۱۶ - ۴\pi$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای یافتن مساحت هاشور زده باید از مساحت مربع ABCD ، مساحت چهار ربع دایره به شعاع ۲ (که برابر مساحت یک دایره به شعاع ۲ است) را کم کنیم:



$$S = ۴^۲ - \pi(۲)^۲ = ۱۶ - ۴\pi$$

۴- در شکل زیر شعاع دایره‌ی محیطی مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC برابر ۱ است. اگر $AM = ۲$ باشد، محیط مثلث کدام است؟



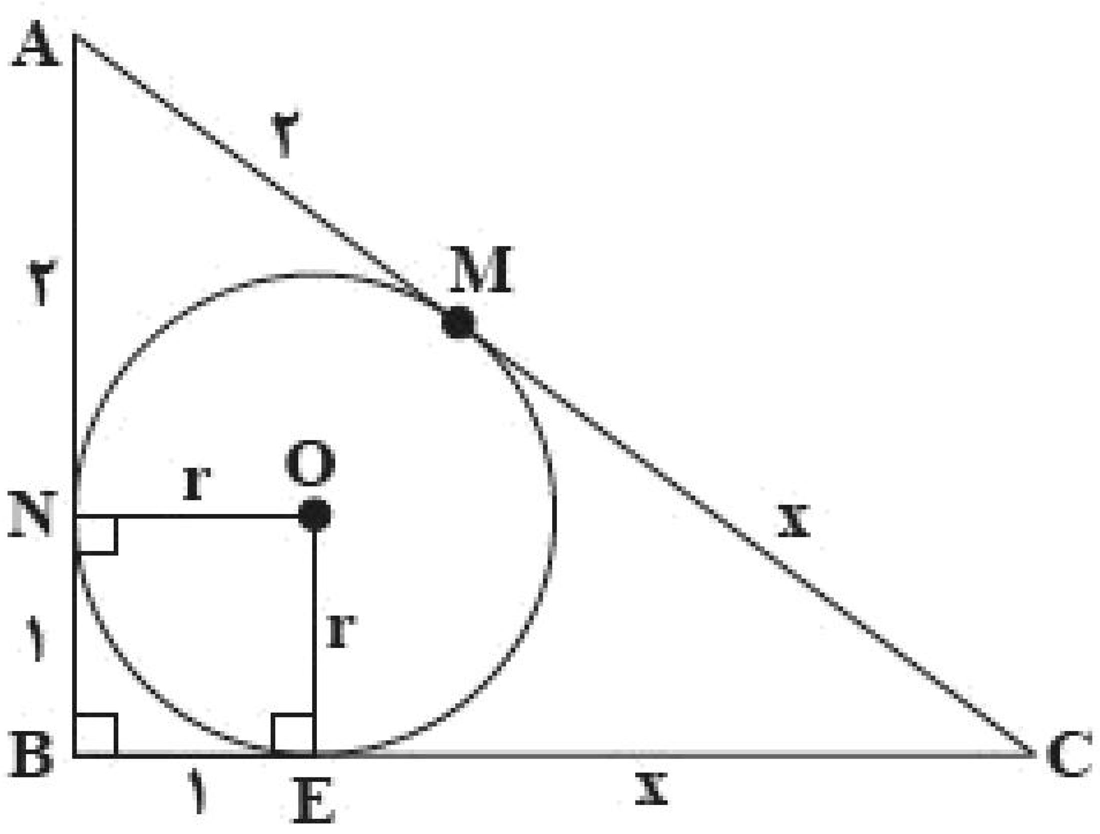
۱) ۱۸

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از یک نقطه‌ی خارج آن با هم برابرند.
با توجه به نکته‌ی بالا داریم:



$$NB = BE \xrightarrow{NB = OE = r = ۱} NB = BE = ۱$$

$$AN = AM \xrightarrow{AM = ۲} AN = AM = ۲$$

$$CM = CE = x$$

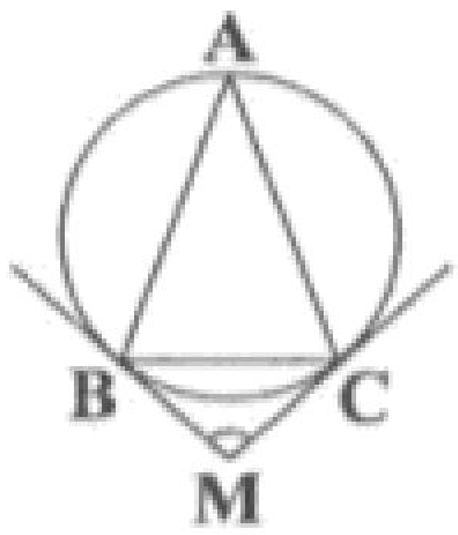
با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AB^۲ + BC^۲ = AC^۲ \Rightarrow (۲+۱)^۲ + (x+۱)^۲ = (x+۲)^۲ \Rightarrow ۹ + x^۲ + ۲x + ۱ = x^۲ + ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow CM = CE = ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = AN + NB = ۲ + ۱ = ۳ \\ BC = BE + CE = ۱ + ۳ = ۴ \\ AC = AM + CM = ۲ + ۳ = ۵ \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\ \text{محیط} = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$$

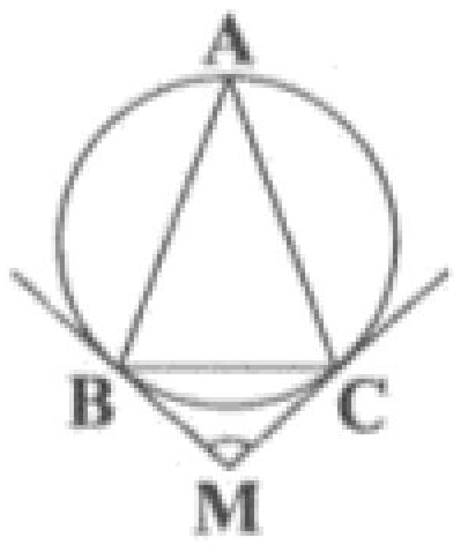
۵- در شکل زیر، MB و MC مماس بر دایره، $AB=AC$ و $\widehat{AC}=۱۴۰^\circ$ است.



زاویه‌ی BMC برابر کدام است؟

۱) ۸۰°　　۲) ۹۰°　　۳) ۱۰۰°　　۴) ۱۱۰°

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



در مثلث ABC داریم: $\hat{C}=\hat{D}=\frac{\widehat{AC}}{۲}=\frac{۱۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۱۸۰^\circ-(۷۰^\circ+۷۰^\circ)=۴۰^\circ$

چون زاویه‌ی A محاطی است، پس: $\widehat{BC}=۲\hat{A}=۸۰^\circ$

چون $MB=MC$ است، پس مثلث MBC متساوی‌الساقین است. با توجه به این‌که $M\hat{B}C$ ظلّی است، بنابراین:

$$M\hat{B}C=\frac{\widehat{BC}}{۲}=۴۰^\circ$$

در نتیجه: $B\hat{M}C=۱۸۰^\circ-(۴۰^\circ+۴۰^\circ)=۱۰۰^\circ$

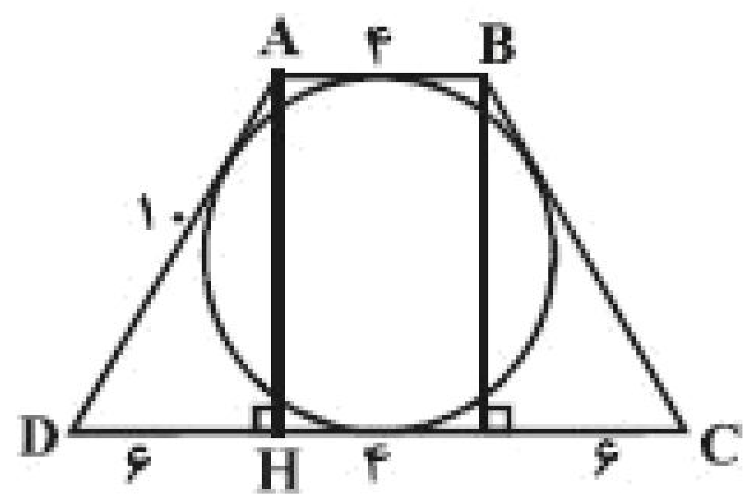
۶- یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده است. اگر محیط ذوزنقه ۴۰ و طول قاعده‌ی کوچک آن ۴ باشد، مساحت ذوزنقه چقدر است؟

۱) ۶۰　　۲) ۸۰　　۳) ۴۰　　۴) ۹۰

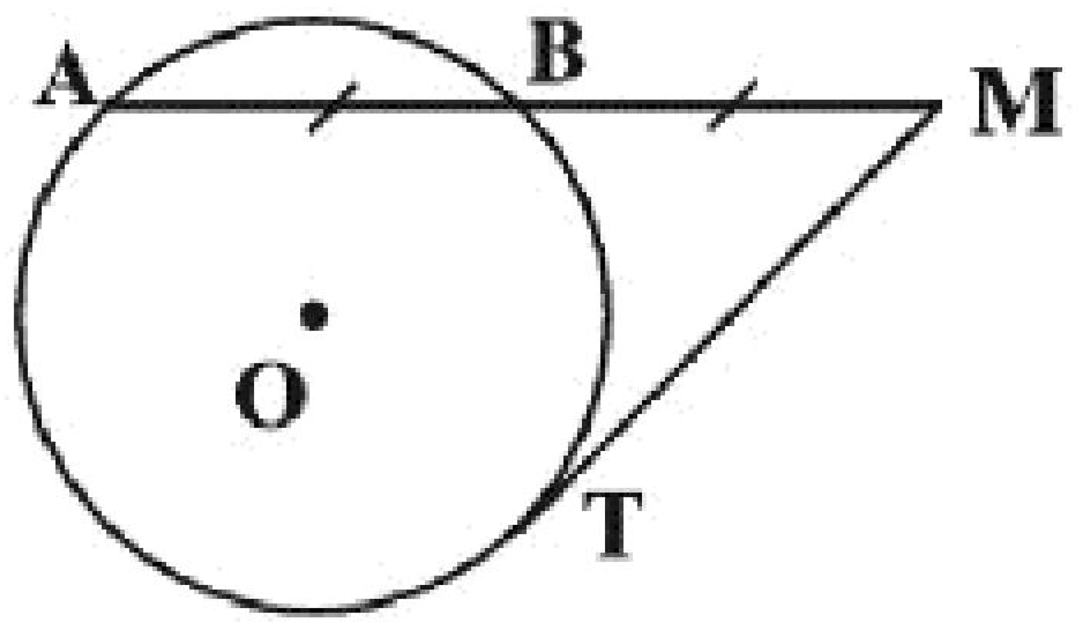
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه‌ی محیطی ABCD داریم:

محیط ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ۴۰ واحد است پس:

$$AD + BC = AB + CD$$
$$AD + BC = ۲۰ \Rightarrow AD = BC = ۱۰$$
$$\underbrace{AB}_{۴} + CD = ۲۰ \Rightarrow CD = ۱۶$$



$$AH = \sqrt{AD^۲ - DH^۲} = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = ۸$$
$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \times AH}{۲} = ۸۰$$

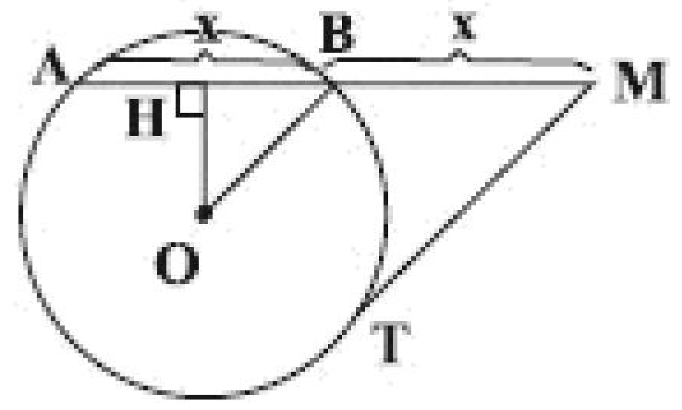


۷- مطابق شکل در دایه‌ی $C\ (O\ ,\ ۴)$، وتر AB را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی M امتداد می‌دهیم. اگر طول مماس MT برابر $۶\sqrt{۲}$ باشد، فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$　　۲) $\sqrt{۷}$

۳) $\sqrt{۱۰}$　　۴) $۲\sqrt{۳}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض سؤال $AB = BM = x$ و $MT = ۶\sqrt{۲}$، در نتیجه طبق روابط طولی داریم:



$$MB . MA = MT^{۲}$$
$$\Rightarrow ۲X^{۲} = ۷۲$$
$$\Rightarrow AB = x = ۶$$

از مرکز دایره، عمود OH را بر وتر AB فرود می‌آوریم. داریم:

$$BH = \frac{AB}{۲} = ۳\ ,\ OB = R = ۴$$

$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OH = \sqrt{OB^{۲} - BH^{۲}} = \sqrt{۱۶ - ۹} = \sqrt{۷}$$

۸- دو دایره‌ی $C(O\ ,\ ۵)$ و $C'(O'\ ,\ ۱)$ برون یک‌دیگرند. اگر طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر $۴\sqrt{۳}$ باشد، طول مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$　　۲) $۲\sqrt{۶}$　　۳) $۳\sqrt{۳}$　　۴) $۲\sqrt{۷}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر طول خط المرکزین دو دایره‌ی C و C' را برابر d در نظر بگیریم، آنگاه طبق فرض داریم:

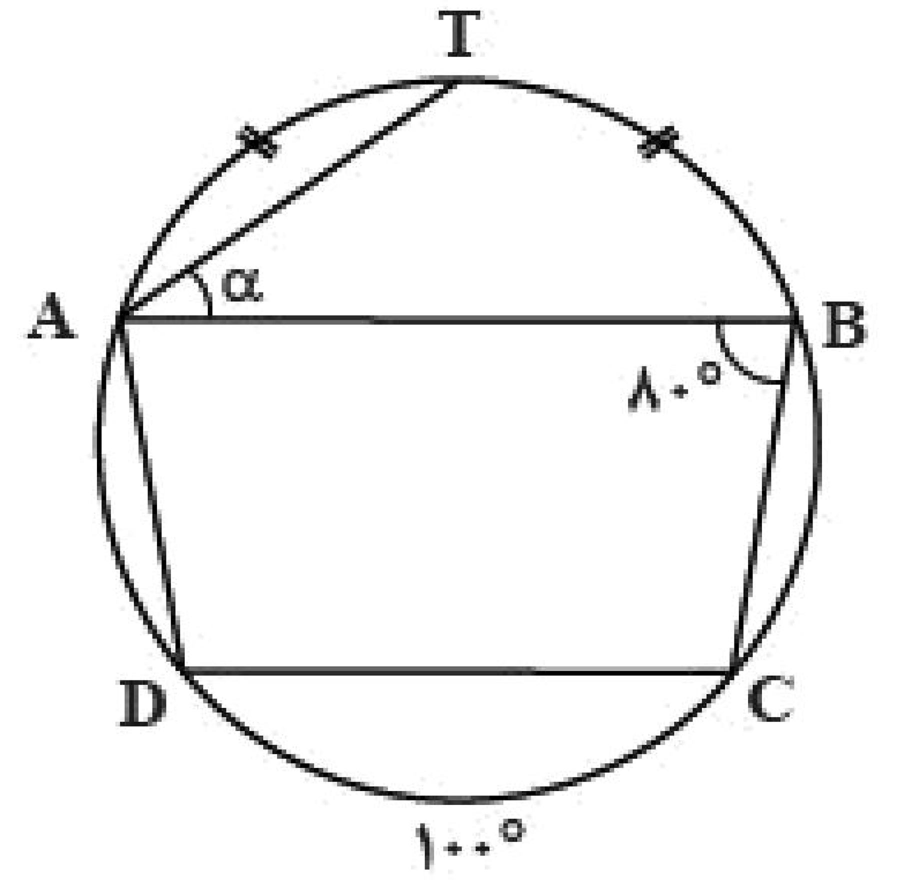
طول مماس مشترک خارجی c و c' : $I = \sqrt{d^{۲} - (۵ - ۱)^{۲}} = ۴\sqrt{۳}$

$$\Rightarrow d^{۲} - ۱۶ = ۴۸ \Rightarrow d^{۲} = ۶۴ \Rightarrow d = ۸$$

$\Rightarrow$ طول مماس مشترک داخلی c و c' : $I' = \sqrt{d^{۲} - (۵ + ۱)^{۲}}$

$$= \sqrt{۸^{۲} - ۶^{۲}} = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$$

۹- در شکل زیر، وترهای AB و CD موازی‌اند. $\overset{\frown}{CD} = ۱۰۰^\circ$ و T وسط کمان AB است. زاویه‌ی α چند درجه است؟



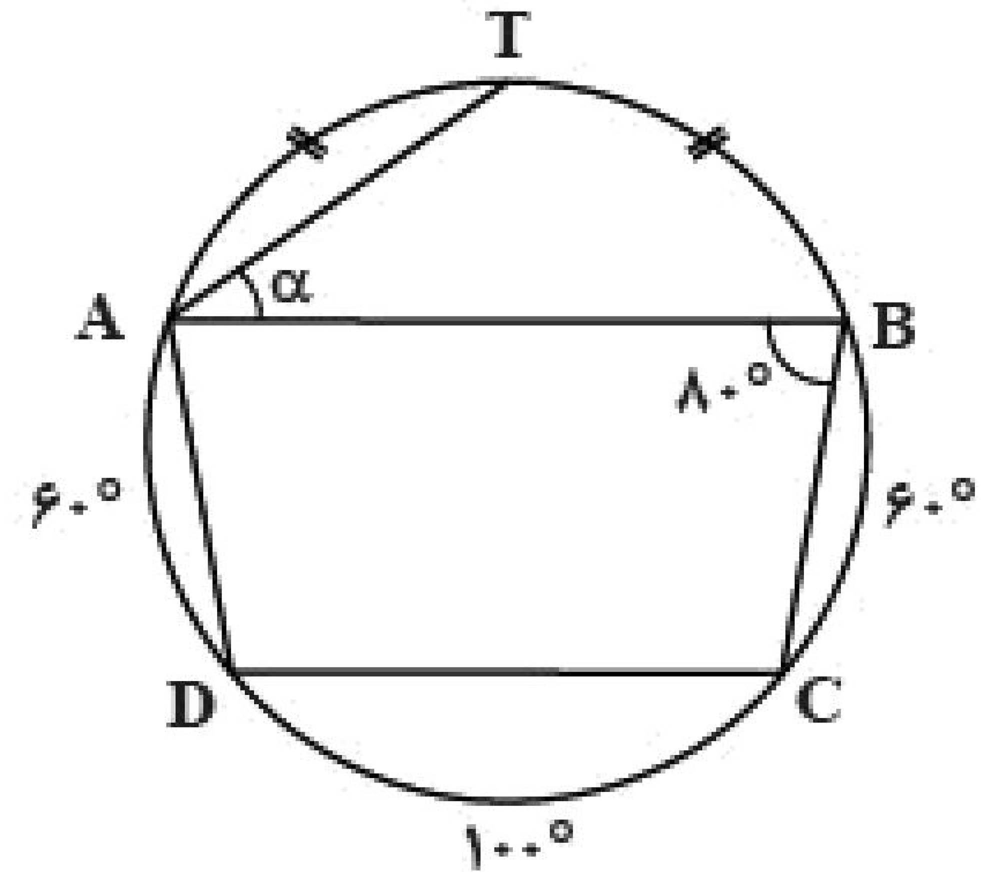
۱) ۲۰

۲) ۲۵

۳) ۳۰

۴) ۳۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی، برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.
نکته: کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، با هم مساوی‌اند.



$$A\hat{B}C = ۸۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{ADC} = ۱۶۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = ۱۶۰^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{DC} = ۱۰۰^\circ} \overset{\frown}{AD} = ۶۰^\circ$$

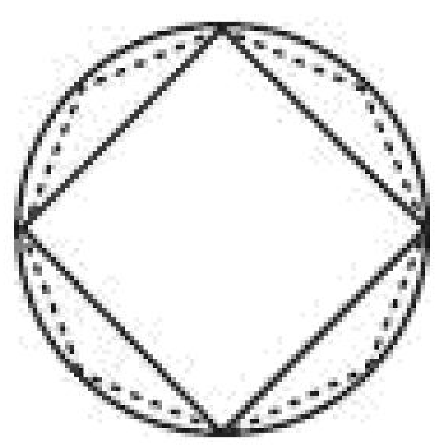
چون $AB \parallel CD$ است، پس کمان‌های محصور بین آن‌ها هم‌اندازه‌اند، بنابراین:

$$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{ATB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{ATB} = ۳۶۰^\circ - ۱۰۰^\circ - ۶۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{TB} = \frac{\overset{\frown}{ATB}}{۲} = \frac{۱۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ \Rightarrow (\text{محاطی})\ \alpha = \frac{\overset{\frown}{TB}}{۲} = ۳۵^\circ$$

۱۰- در شکل زیر مربعی در یک دایره به شعاع واحد محاط شده است. مساحت هشت‌ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می‌شود، کدام است؟



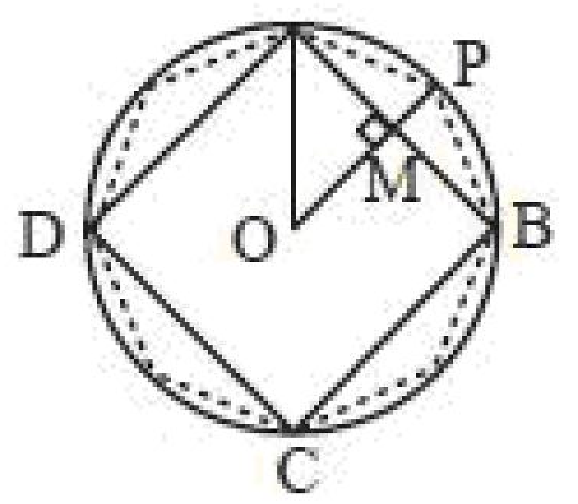
۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $۲\sqrt{۲}$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$a =$ ضلع مربع

$۱ =$ شعاع دایره $\Rightarrow OA = OP = ۱$

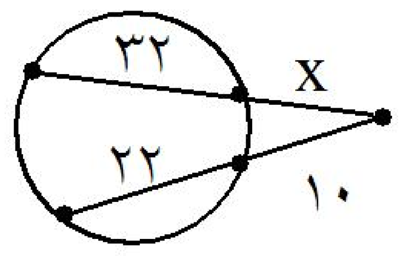
قطر مربع $d = a\sqrt{۲}$

$$OA = \frac{d}{۲} = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} = ۱ \Rightarrow a = \sqrt{۲}$$

$$S_{APB} = \frac{۱}{۲} \times AB \times PM = \frac{۱}{۲} \times \left(\sqrt{۲}\right) \times \left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۲} - ۱}{۲}$$

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = ۴S_{APB} + S_{ABCD} = ۴\left(\frac{\sqrt{۲} - ۱}{۲}\right) + \sqrt{۲}^{۲}$$

$$= ۲\left(\sqrt{۲} - ۱\right) + ۲ = ۲\sqrt{۲} - ۲ + ۲ = ۲\sqrt{۲}$$



۱۱- در شکل مقابل مقدار x کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر رابطه در دایره داریم: $x(۳۲ + x) = ۱۰(۲۲ + ۱۰)$

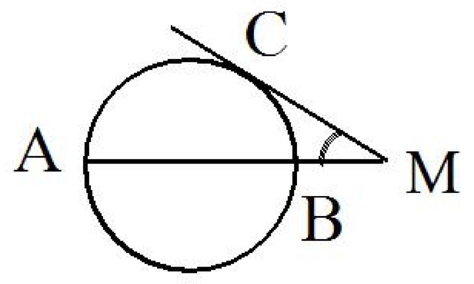
$$x^{۲} + ۳۲x - ۳۲۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۸)(x + ۴۰) = ۰$$

در نتیجه $x = ۸$.

۱۲- خط مماس در نقطه C واقع بر دایره با امتداد قطر AB زاویه ۳۶ درجه می‌سازد. نسبت دو کمان CB به CA کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زاویه M برابر نصف تفاضل دو کمان CA و CB است.



$$\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{CB} = ۱۸۰° \ , \ \overset{\frown}{CA} - \overset{\frown}{CB} = ۲(۳۶) = ۷۲°$$

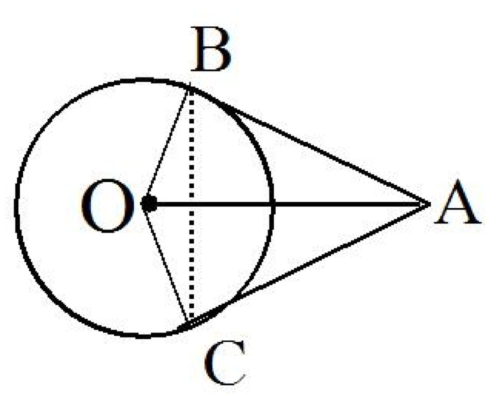
در نتیجه: $\overset{\frown}{CA} = ۱۲۶°$, $\overset{\frown}{CB} = ۵۴°$، در نتیجه: $\frac{\overset{\frown}{CB}}{\overset{\frown}{CA}} = \frac{۳}{۷}$.

۱۳- از نقطه A خارج از دایره‌ای به شعاع r، دو مماس AB و AC بر دایره رسم شده است. اگر کوتاه‌ترین فاصله نقطه A از دایره $r(\sqrt{۲} - ۱)$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر BC کدام است؟

۱) r ۲) $\frac{r}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}r$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}r$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فاصله نقطه A از نزدیک‌ترین نقطه دایره برابر $r(\sqrt{۲} - ۱)$ و شعاع دایره r است، پس OA برابر است با: $OA = r + (\sqrt{۲} - ۱)r = \sqrt{۲}r$

در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم:



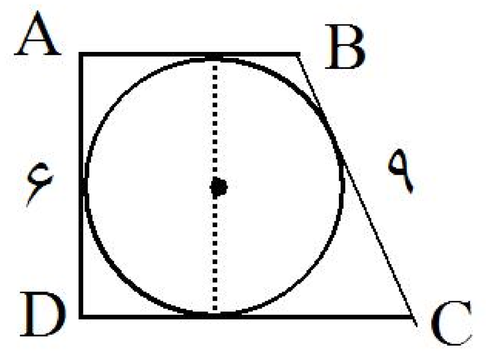
$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = ۹۰ \\ OB = r \\ OA = \sqrt{۲}r\end{array}\right\} \Rightarrow AB^{۲} = OA^{۲} - OB^{۲} = ۲r^{۲} - r^{۲} = r^{۲} \Rightarrow AB = r$$

بنابراین چهارضلعی ABOC مربع است، بنابراین فاصله مرکز دایره از وتر BC برابر نصف OA یعنی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}r$ می‌باشد.

۱۴- ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ای بر یک دایره به شعاع ۳ محیط است. اگر طول ساق غیرقائم برابر ۹ باشد، مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) ۳۴ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول ساق قائم و ارتفاع ذوزنقه‌ها برابر قطر دایره محاطی است و چون چهارضلعی محیطی است می‌توان نوشت:

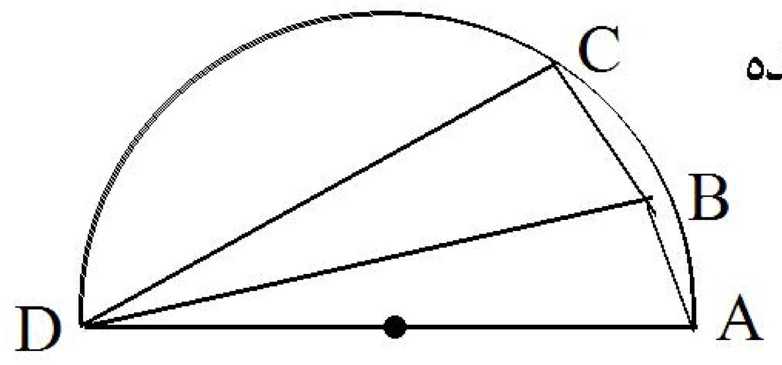


$$AB + DC = AD + BC = ۶ + ۹ = ۱۵$$

و بنابراین مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}(۱۵)۶ = ۴۵$$

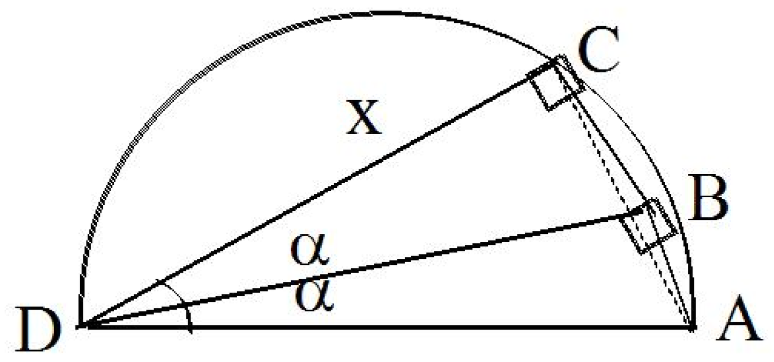
۱۵- چهارضلعی ABCD مطابق شکل زیر در نیم‌دایره‌ای به قطر $AD = ۶$ محاط شده است. اگر طول هر دو ضلع AB و BC برابر ۲ باشد، طول ضلع CD کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۱۷}$

۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۱۴}{۳}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از D به B وصل می‌کنیم. زاویه $\widehat{D}_۱$ و $\widehat{D}_۲$ زاویه‌های محاطی روبه‌رو یک کمان هستند و با هم برابراند. فرض کنید این زاویه α باشد، داریم:



$$A\overset{\triangle}{B}D : \operatorname{Sin}\alpha = \frac{AB}{AD} = \frac{۱}{۳}$$

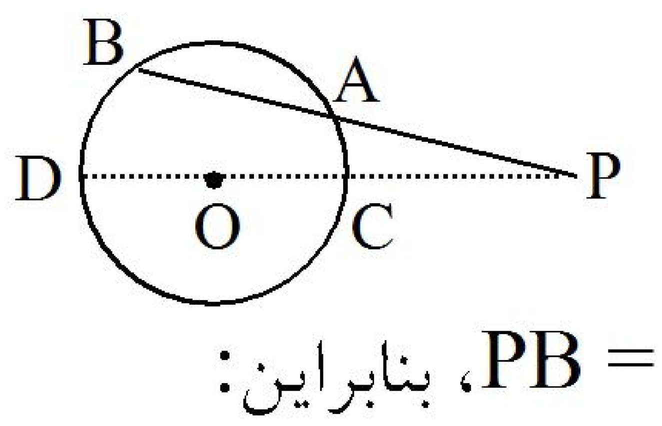
$$A\overset{\triangle}{C}D : \operatorname{Cos}۲\alpha = \frac{x}{۶}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cos}۲\alpha = ۱ - ۲\operatorname{Sin}^۲\alpha \Rightarrow \frac{x}{۶} = ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۹}\right) = \frac{۷}{۹} \Rightarrow x = \frac{۱۴}{۳}$$

۱۶- نقطه P خارج دایره‌ای به شعاع ۵ واحد است. اگر نزدیک‌ترین نقطه از دایره تا نقطه P برابر ۶ واحد و قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده باشد که $AB = PA - ۴$، اندازه AB کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنا به قضیه روابط طولی در دایره داریم:



$$PA.PB = PC.PD$$

بنا به فرض: $PC = ۶$ ، $PD = ۱۰ + ۶ = ۱۶$ ، $AB = x$ ، $PA = x + ۴$ ، $PB = ۲x + ۴$، بنابراین:

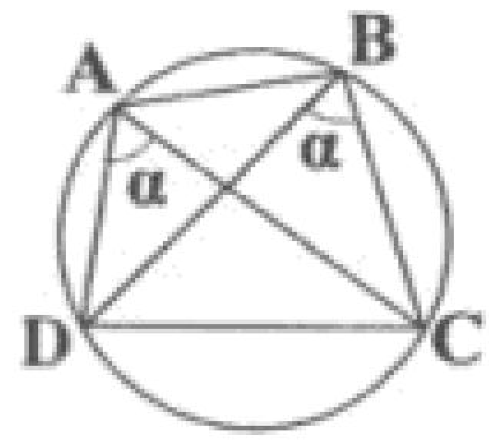
$$(x + ۴)(۲x + ۴) = ۶ \times ۱۶ \Rightarrow (x + ۲)(x + ۴) = ۶ \times ۸ \Rightarrow x = ۴$$

۱۷- در چهار ضلعی ABCD ، اگر $D\hat{A}C = D\hat{B}C$ باشد، کدام گزینه همواره صحیح نیست؟

۱) $D\hat{C}D = A\hat{B}D$ ۲) $A\hat{D}B = A\hat{C}B$ ۳) $\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ ۴) $A\hat{D}C = B\hat{C}D$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $D\hat{A}C = D\hat{B}C = \alpha$ ، بنابراین نقاط A و B روی کمان درخور زاویه‌ی α روبه‌رو به پاره‌خط DC قرار دارند. پس چهار ضلعی ABCD محاطی است و مطابق شکل داریم:

بررسی گزینه‌ها:



۱) $A\hat{C}D = A\hat{B}D = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AD}$

۲) $A\hat{D}B = A\hat{C}B = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$

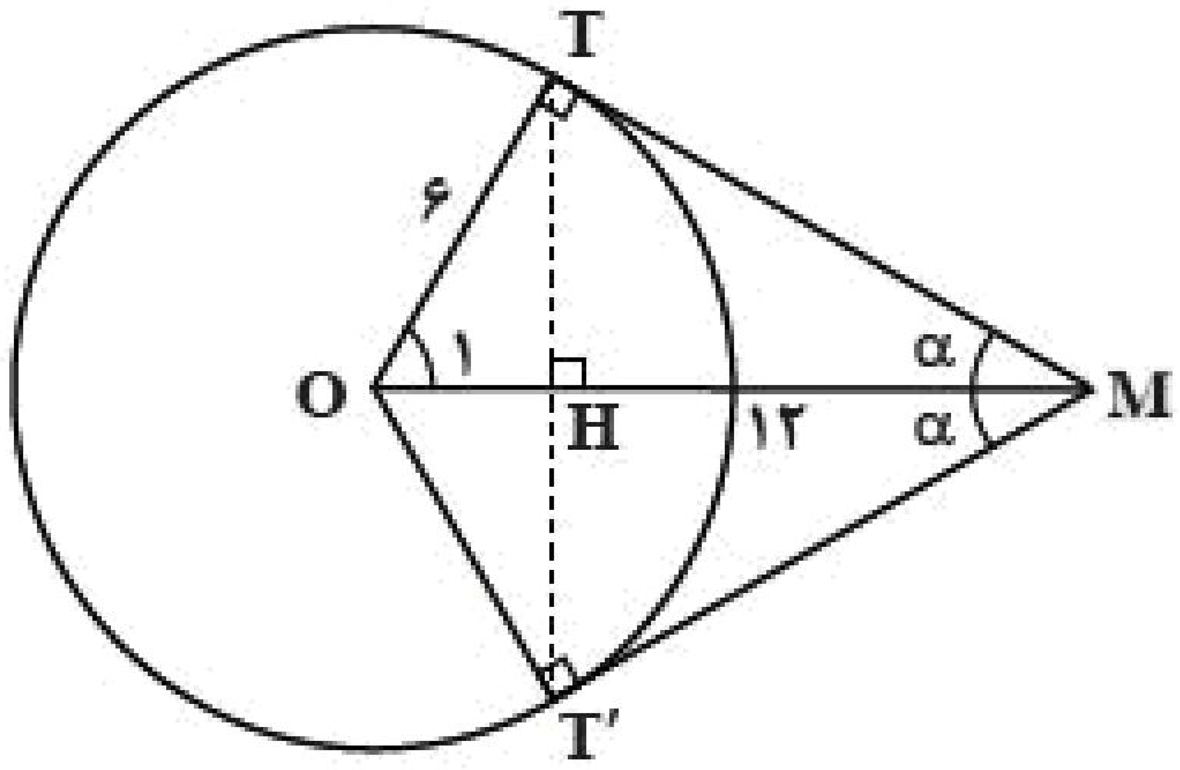
۳) $\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$

بنابراین گزینه‌های (۱)،(۲) و(۳) صحیح‌اند ولی گزینه‌ی (۴) فقط در حالتی‌که $AB \parallel CD$ باشد صحیح است.

۱۸- دایره‌ی $C(O\,,\,۶)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱۲ از مرکز دایره مفروض‌اند. از نقطه‌ی M دو مماس MT و MT' را بر این دایره رسم می‌کنیم. اندازه‌ی TT' کدام است؟

۱) ۶ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) ۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$O\hat{M}T:\ \mathrm{Sin}\alpha = \frac{OT}{OM} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

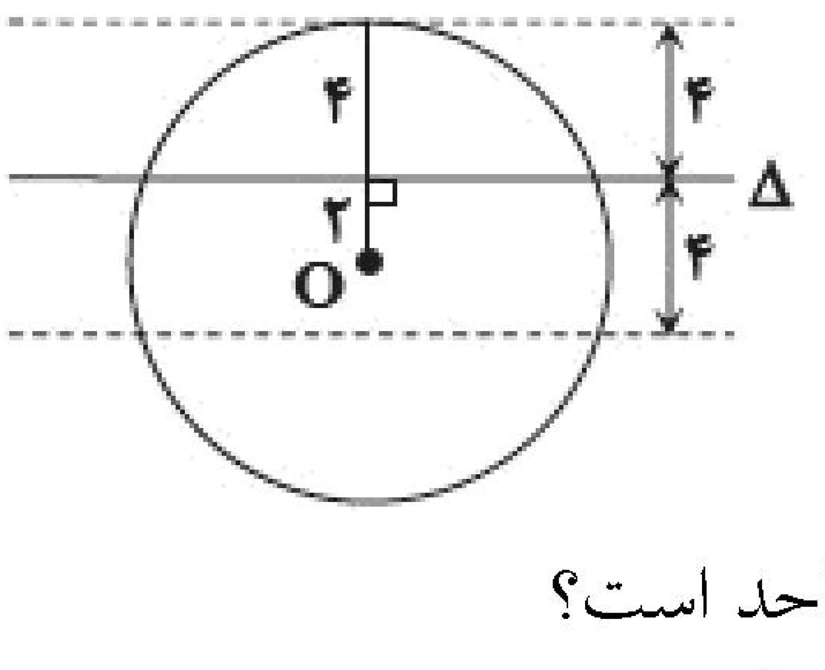
$$\hat{O}_۱ = ۹۰^\circ - \alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow \mathrm{Sin}\hat{O}_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$O\hat{T}H:\ \mathrm{Sin}\hat{O}_۱ = \frac{TH}{OT} = \frac{\frac{TT'}{۲}}{۶} = \frac{TT'}{۱۲}$$

$$\mathrm{Sin}\hat{O}_۱ = \sqrt{\frac{۳}{۲}} \longrightarrow \frac{TT'}{۱۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow TT' = ۶\sqrt{۳}$$

۱۹- دایره‌ی $C(O\,,\,۶)$ مفروض است. خط Δ به فاصله‌ی ۲ از نقطه‌ی O قرار دارد. چند نقطه روی محیط دایره‌ی C وجود دارد که فاصله‌اش از خط Δ برابر ۴ باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

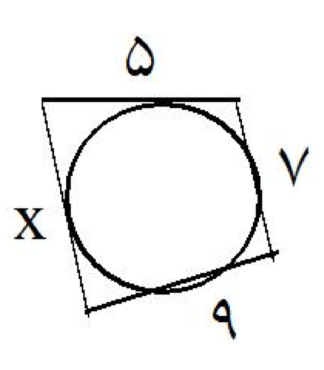


گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از خط Δ به فاصله‌ی ۴ باشند، دو خط موازی Δ و به فاصله‌ی ۴ از آن است. مطابق شکل یکی از این دو خط بر دایره مماس است و دیگری دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، پس سه نقطه با این ویژگی وجود دارد.

۲۰- در چهارضلعی محیطی اندازه سه ضلع متوالی ۹ ,۷ ,۵ واحد است. ضلع چهارم چند واحد است؟

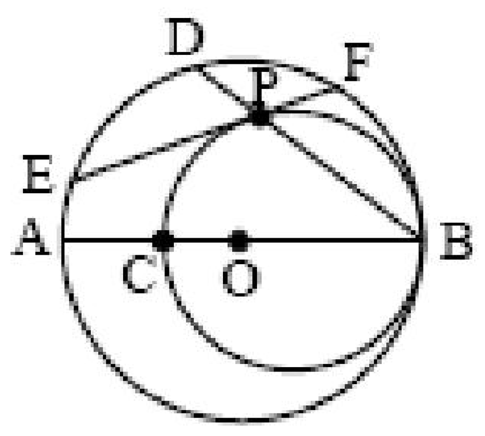
۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در چهارضلعی محیطی، طول قطعات مماس‌ها که از یک رأس رسم شوند، برابراند، در نتیجه مجموع دو ضلع مقابل برابر مجموع دو ضلع مقابل دیگر است.



$$۵ + ۹ = ۷ + x \Rightarrow x = ۷$$

۲۱- در شکل مقابل نقطه‌ی C وسط شعاع OA و دو دایره مماسند و EF مماس بر دایره‌ی کوچک‌تر. اگر $EP = \frac{۳}{۲}PF = ۱۵$ باشد، مقدار DP کدام است؟



۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۳\sqrt{۵}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. قطر دایره‌ی کوچک‌تر $\frac{۳}{۴}$ قطر دایره‌ی بزرگ‌تر است. پس وتر BP نیز $\frac{۳}{۴}$ وتر DB ست. (دو مثلث CPB و ADB متشابهند.)

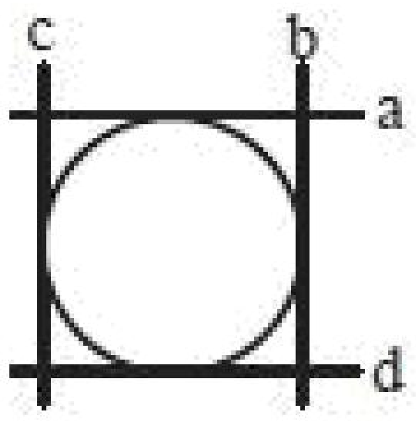
$$\frac{BP}{BD} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow BP = ۳DP$$

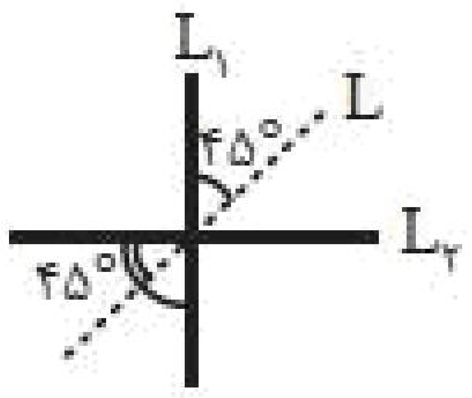
روابط طولی: $EP \,.\, FP = DP \,.\, BP \Rightarrow ۱۵ \times ۱۰ = DP \,.\, (۳DP) \Rightarrow DP = ۵\sqrt{۲}$

۲۲- چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره‌ی C مماس بوده و با خط مفروض L زاویه‌ی ۴۵ درجه بسازد؟

۱) حداکثر ۱ ۲) حداکثر ۲ ۳) حداکثر ۳ ۴) حداکثر ۴

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.
اگر دو خط $L_۱$ و $L_۲$ بر هم عمود باشند، خط L یکی از نیمسازهای زاویه‌ی بین $L_۱$ و $L_۲$ است. اکنون اگر موازی $L_۱$ و $L_۲$ مماس‌هایی بر دایره رسم می‌کنیم، جواب‌ها به‌دست می‌آید، حداکثر ۴ مماس: a، b، c و d.





۲۳- طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر ۷ واحد و اندازه‌ی خط‌المرکزین ۹ واحد است، شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر چه‌قدر از شعاع دایره‌ی کوچک‌تر بیش‌تر است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} L = ۷ \\ |OO'| = ۹ \end{cases} \Rightarrow L^۲ = \underbrace{d}_{|OO'|}{}^۲ - (R - R')^۲$$

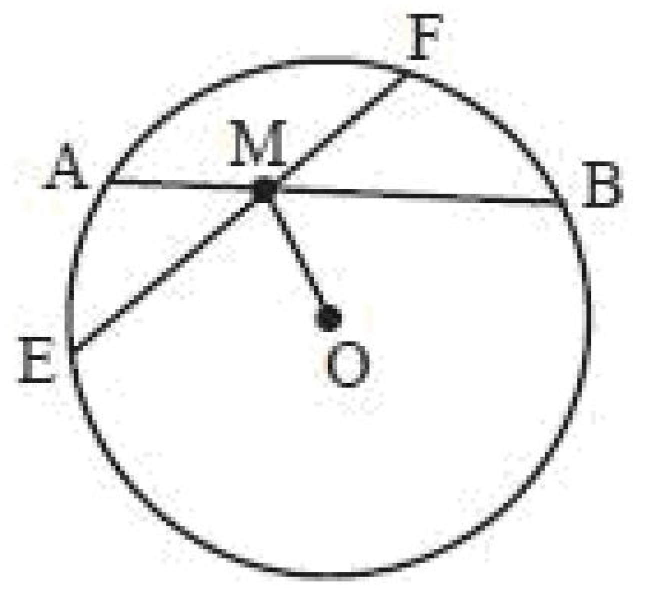
$$\Rightarrow (R - R')^۲ = ۸۱ - ۴۹ = ۳۲ \Rightarrow R - R' = ۴\sqrt{۲}$$

۲۴- وتر AB به طول ۸ در دایره‌ی $C(O,R)$ توسط نقطه‌ی M به نسبت ۲ به ۳ تقسیم شده است. اندازه‌ی کوچک‌ترین وتر گذرنده از M کدام است؟

۱) $\frac{۱۶\sqrt{۶}}{۵}$ ۲) $\frac{۸\sqrt{۶}}{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. وتری که از M بر OM عمود می‌شود، وتر کوچک‌تر است و در M نصف می‌شود.

بنابر فرض: $MA = \frac{۱۶}{۵}$ و $MB = \frac{۲۴}{۵}$.

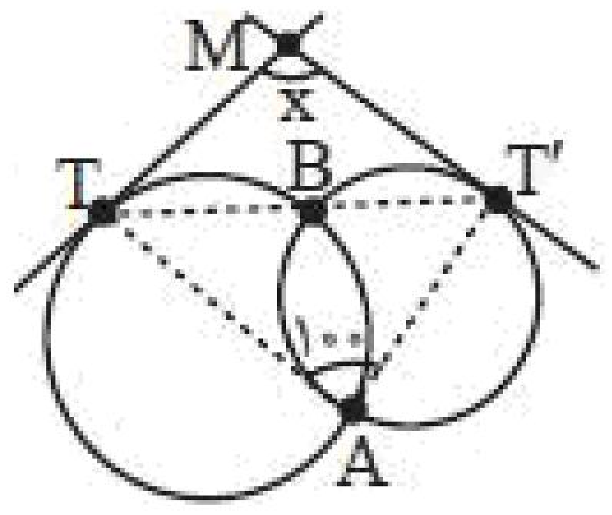


$$ME \times MF = MA \times MB$$

$$ME^{۲} = \frac{۱۶}{۵} \times \frac{۲۴}{۵} \Rightarrow ME = \frac{۸\sqrt{۶}}{۵}$$

$$EF = \frac{۱۶\sqrt{۶}}{۵}$$

۲۵- با توجه به شکل، پاره‌خط‌های MT و MT' بر دایره‌ها مماس‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی x کدام است؟



۱) ۷۵°

۲) ۷۰°

۳) ۸۰°

۴) ۹۰°

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

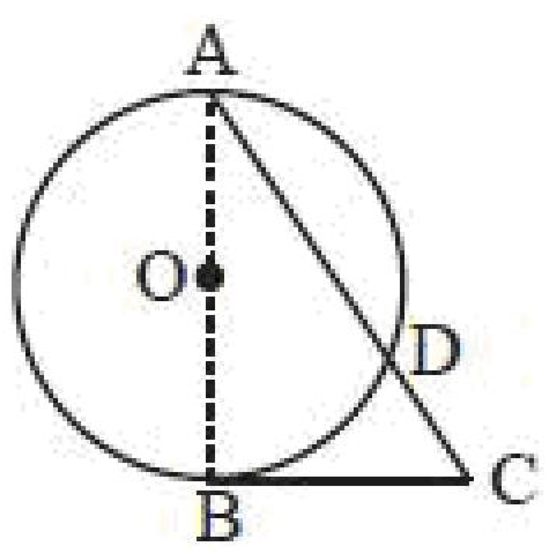
$$\begin{cases} B\hat{T'}M = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BT'} \\ B\hat{T}M = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BT} \end{cases} \Rightarrow B\hat{T'}M + B\hat{T}M = \frac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{BT'} + \overset{\frown}{BT}\right)$$

و
$$\begin{cases} B\hat{A}T' = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BT'} \\ B\hat{A}T = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BT} \end{cases} \Rightarrow T\hat{A}T' = \frac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{BT} + \overset{\frown}{BT'}\right)$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BT} + \overset{\frown}{BT'} = ۲ \times ۱۰۰^\circ = ۲۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - \left(B\hat{T'}M + B\hat{T}M\right) = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۲۶- در شکل روبه‌رو پاره‌خط BC مماس بر دایره، زاویه‌ی $\hat{C} = ۶۰^\circ$ و اندازه‌ی CD برابر $\sqrt{۳}$ واحد می‌باشند. اندازه‌ی قطر دایره چه‌قدر است؟



۱) ۶

۲) $۳\sqrt{۳}$

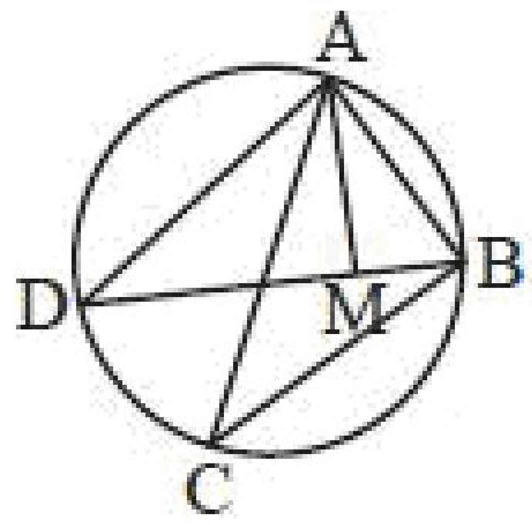
۳) ۸

۴) $۴\sqrt{۳}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$CB^{۲} = CD \times CA\ ,\ \hat{A} = ۳۰^\circ \Rightarrow AC = ۲BC \Rightarrow CB = ۲CD = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow BC = ۲\sqrt{۳}\ ,\ tg\hat{C} = \sqrt{۳} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۶$$



۲۷- در دایره‌ی شکل مقابل $\overset{\frown}{DAC} = \overset{\frown}{BAM}$، حاصل $AD \times BC$ برابر کدام است؟

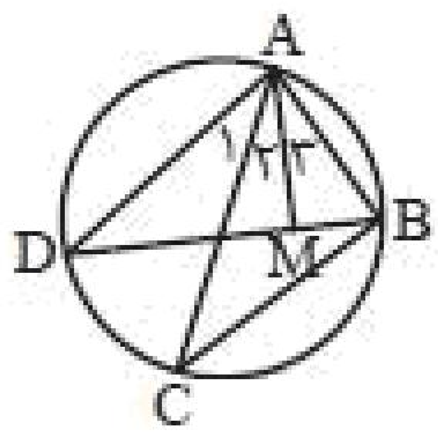
۱) $BM \times AC$

۲) $BD \times MB$

۳) $AB \times DC$

۴) $MD \times AC$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



طبق فرض: $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۳ = \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳$

$$\left.\begin{array}{l} D\hat{A}M = B\hat{A}C \\ \hat{D} = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{D}M \sim A\overset{\triangle}{B}C \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC}$$

$$\Rightarrow AD \times BC = AC \times DM$$

۲۸- طول مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۷ برابر ۶ است. طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کدام است؟

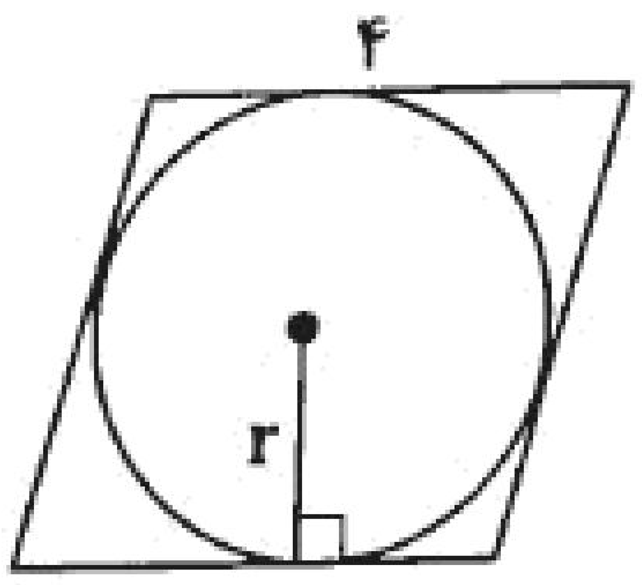
۱) ۵   ۲) ۱۰   ۳) ۶   ۴) ۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: در دو دایره‌ی $C(O , R)$ و $C'(O' , R')$، طول مماس مشترک داخلی برابر $\sqrt{OO'^۲ - (R + R')^۲}$ و طول مماس مشترک خارجی برابر $\sqrt{OO'^۲ - (R - R')^۲}$ است.

مماس مشترک داخلی : $TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R + R')^۲} \Rightarrow \sqrt{OO'^۲ - ۸^۲} \xlongequal{\text{طبق فرض}} ۶$

$\Rightarrow OO'^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow OO' = ۱۰$

مماس مشترک خارجی : $T_۱T_۲ = \sqrt{OO'^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۱۰۰ - (۷ - ۱)^۲} = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = \sqrt{۶۴}$
$= ۸$



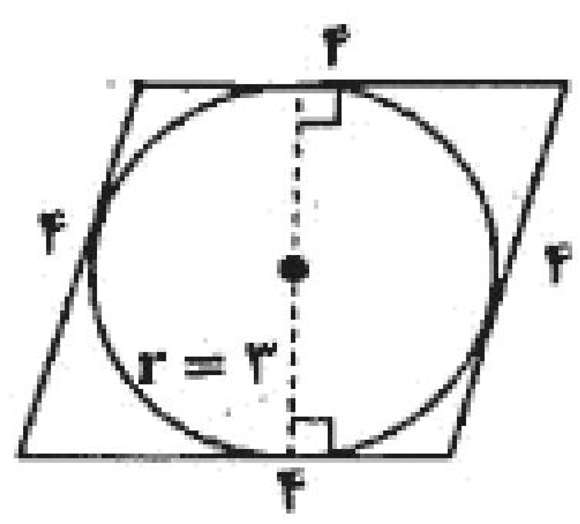
۲۹- دایره‌ای به شعاع $r = ۳$ در یک لوزی به ضلع ۴ محاط است. مساحت این لوزی کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۲۴

۳) ۲۰

۴) ۱۸



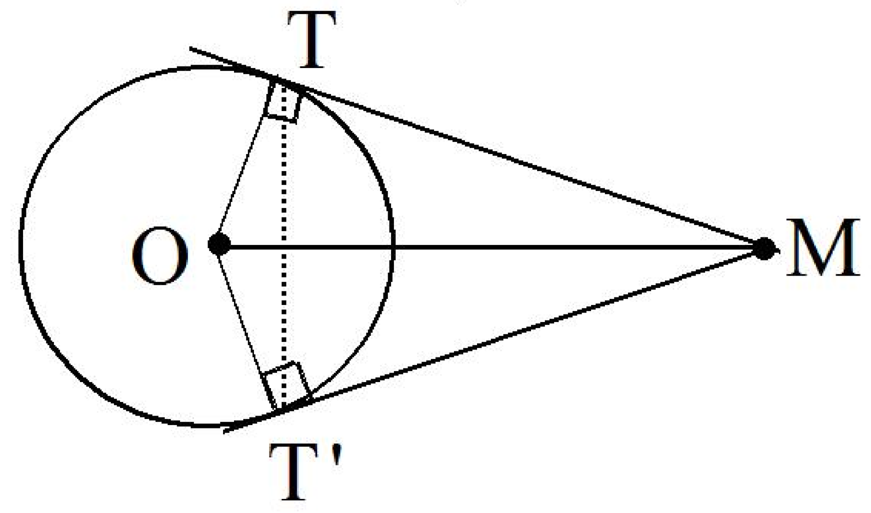
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده‌ی نظیرش، مطابق شکل ارتفاع این لوزی برابر است با:

$h = ۲r = ۲ \times ۳ = ۶$

با توجه به نکته‌ی بالا، مساحت این لوزی برابر است با:

$S_{\text{لوزی}} = a.h = ۴ \times ۶ = ۲۴$

۳۰- دایره‌ی $C(O\ ,\ ۴)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۸ از نقطه‌ی O مفروض هستند. طول پاره‌خط TT'، کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$

۲) ۴

۳) $۸\sqrt{۳}$

۴) ۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $O\overset{\triangle}{T}H$ و $O\overset{\triangle}{T}M$ بنابه حالت (زز) متشابه‌اند. نسبت تشابه آن‌ها به‌صورت زیر است:

$$\frac{OH}{OT}=\frac{OT}{OM}\xrightarrow{OT=R}OH.\,OM=R^{۲}\xrightarrow[R=۴]{OM=۸}OH=۲$$

با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OTH داریم:

$$TH=\sqrt{OT^{۲}-OH^{۲}}=\sqrt{۱۶-۴}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow TT'=۲TH=۴\sqrt{۳}$$

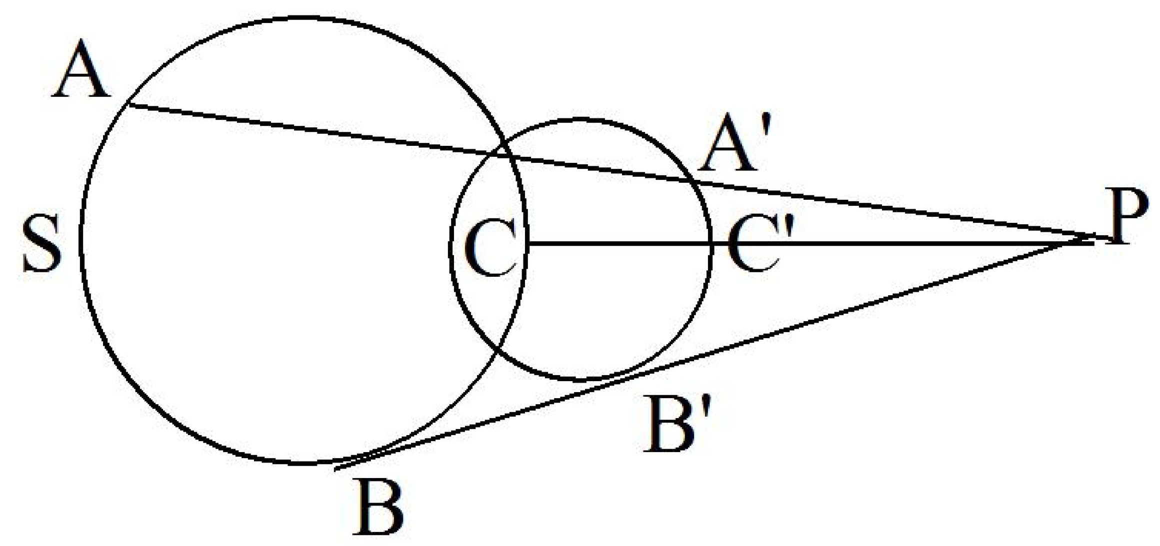
۳۱- هر دو دایره با شعاع‌های مساوی، با کدام تبدیلات زیر بر هم منطبق می‌شوند؟

۱) یک انتقال و یک دوران ۱۸۰°
۲) یک انتقال و یک تجانس مستقیم
۳) یک دوران ۱۸۰° و یک تجانس مستقیم
۴) دو تجانس مستقیم و معکوس

دو دایره متمایز مساوی نمی‌توانند مجانس مستقیم یکدیگر گردند زیرا مرکز تجانس آنها در بی‌نهایت قرار می‌گیرد. اگر مرکز تقارن وسط خط المرکزین قرار گیرد، قرینه مرکزی یکی از دایره‌ها بر دیگری منطبق می‌گردد. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۳۲- موقعیت اوساط پاره‌خطهایی که نقطه مفروض P را به نقاط مختلف یک دایره وصل می‌کند عبارتست از:

۱) یک خط
۲) یک نیم‌خط
۳) دو خط
۴) یک دایره

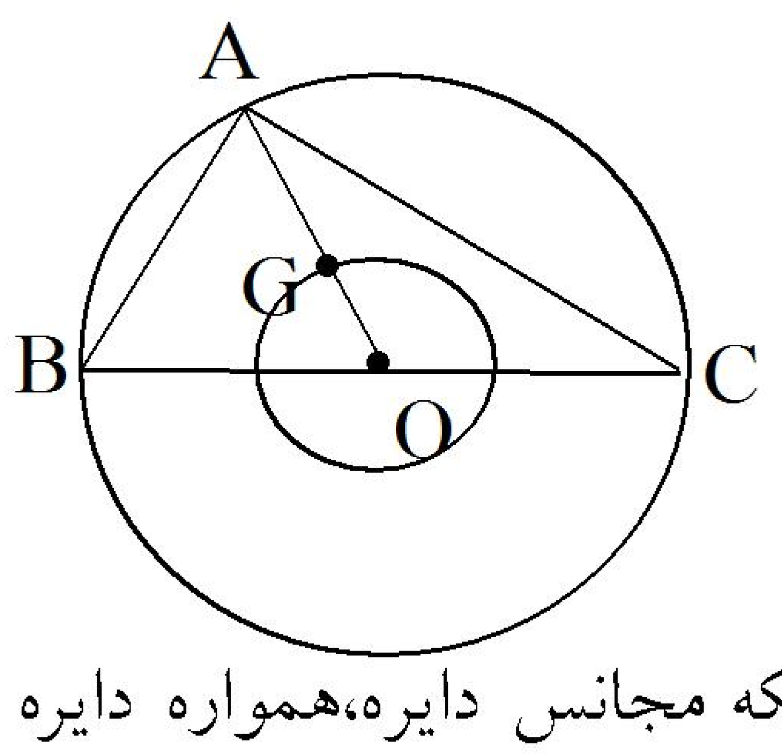


$$\frac{PA'}{PA}=\frac{PB'}{PB}=\frac{PC'}{PC}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نقاط A' و B' و C' مجانسهای نقاط A و B و C می‌باشند.
با تکرار عمل فوق برای تمام نقاط دایره، دایره‌ای حاصل می‌شود که مجانس دایرهٔ S با نسبت تجانس $\frac{۱}{۲}$ باشد. بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.

۳۳- مثلث قائم الزاویهٔ ABC ($A=۹۰^{\circ}$) در دایره‌ای محاط است. اگر BC ثابت و A روی محیط دایره حرکت کند مکان هندسی نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث کدام است؟

۱) دایره‌ای به شعاع $\frac{BC}{۶}$
۲) پاره خطی موازی BC
۳) دایره‌ای به قطر AC
۴) دایره‌ای به قطر $\frac{BC}{۲}$



چون BC وتر مثلث و ثابت است و $\hat{A}$ از آن به زاویهٔ ۹۰° دیده می‌شود. بنابراین BC قطر دایره است. مکان نقطهٔ A بر روی دو نیم‌دایره یا محیط یک دایره (به غیر از نقاط B و C) است.

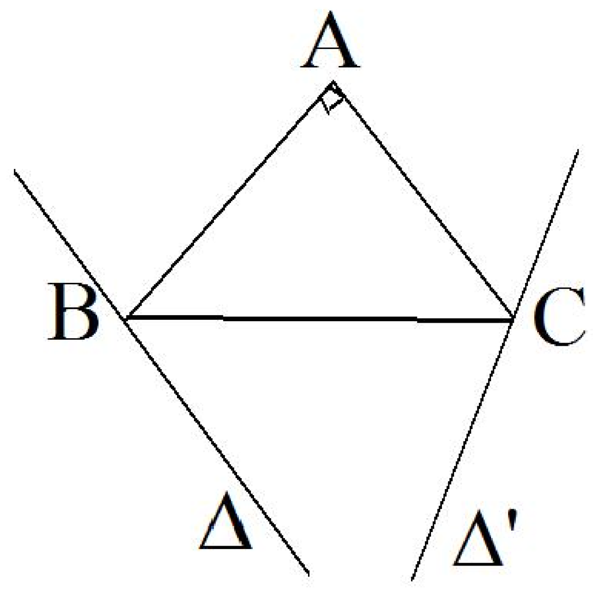
$$\frac{OG}{AO}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین G مجانس نقطهٔ A به مرکز تجانس O و نسبت تجانس $\frac{۱}{۳}$ است. با توجه به اینکه مجانس دایره،همواره دایره است، مکان G ، دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{۳}$ است.

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

۳۴- دو خط متمایز Δ و Δ' و نقطه‌ی A خارج آن دو مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین با رأس A که دو سر قاعده‌ی آن بر روی هر دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

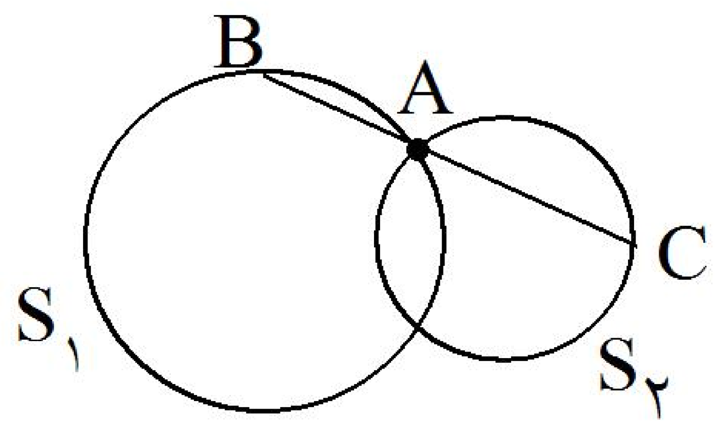
۱) مجانس ۲) دوران ۳) بازتاب (تقارن) ۴) انتقال



با توجه به اینکه نقطه‌ی A ثابت است و فواصل نقطه‌ی B و C از A برابر است می‌توان نتیجه گرفت نقطه‌ی C دوران یافته‌ی B به مرکز A و زاویه‌ی ۹۰° است. یعنی دوران یافته‌ی خط Δ به مرکز A و زاویهٔ ۹۰° خط Δ' را در نقطه‌ی C قطع می‌کند بنابراین گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح سوال است.

۳۵- دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۵ واحد در نقطه A متقاطع‌اند. برای رسم خط گذرنده از A که در دو دایره وترهای مساوی جدا کند الزاماً قرینه یکی از دایره‌ها نسبت به کدام نقطه رسم می‌شود؟

۱) مرکز دایره بزرگتر ۲) مرکز دایره کوچکتر ۳) وسط خط المرکزین ۴) نقطه A



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل هرگاه قاطع ABC در ۲ دایره وترهای مساوی AB و AC را جدا کند، می‌توان گفت نقطه‌ی C قرینه‌ی B نسبت به نقطه‌ی A خواهد بود بنابراین هرگاه دایره‌ی $S_۱$ را نسبت به A قرینه‌ی کنیم دایره‌ی $S_۲$ را در نقطه‌ی C قطع کرده و امتداد AC جواب مسأله خواهد بود.

۳۶- خط $۲x - ۵y + ۱۰ = ۰$ تصویر خط $۲x - ۵y - ۱۰ = ۰$ می‌باشد، تبدیلی که در این مساله به کار رفته است، کدام است؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) هر سه جواب صحیح است

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. دو خط موازی هستند و طبق ویژگی تبدیلها، اگر دو خط موازی باشند، هر یک از آنها می‌تواند تحت یک انتقال،دوران ۱۸۰° یا بازتاب بر روی دیگری نگاشته شود.

۳۷- بازتاب نسبت به دو محور متقاطع و دو محور موازی به ترتیب .... و .... است.

۱) دوران - انتقال ۲) انتقال - دوران ۳) دوران - دوران ۴) انتقال - انتقال

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۳۸- کدام دو خط می‌توانند تصویر یکدیگر تحت همه‌ی تبدیلهای دوران، بازتاب، تجانس و انتقال باشند؟

۱) دو خط موازی ۲) دو خط متقاطع عمود بر هم

۳) دو خطی که با هم زاویه‌ی ۶۰° می‌سازند ۴) دو خط متنافر در فضا

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۳۹- ترکیب یک انتقال با یک دوران چیست؟

۱) یک دوران ۲) یک انتقال ۳) یک تجانس ۴) یک تقارن مرکزی

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نتیجه‌ی ترکیب چند انتقال، انتقال است. نتیجه‌ی ترکیب چند دوران، دوران است. نتیجه‌ی ترکیب انتقال و دوران، دوران است به طوری که زاویه‌ی دوران ثابت مانده و تنها مرکز دوران تغییر می‌کند.

۴۰- کدام صحیح است؟

۱) هر دو شکل متشابه، مجانس هم نیز می‌باشند.

۲) می‌توان هر نقطه روی نیمساز بین دو خط متقاطع را یک مرکز دوران برای دو خط در نظر گرفت.

۳) هر دو خط متقاطع فقط دارای یک محور بازتاب هستند.

۴) بازتاب متوالی نسبت به دو محور متقاطع خود یک انتقال است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گزینه‌ی ۱ نادرست است زیرا باید نظیر به نظیر اضلاع متناسب در شکل‌های متشابه، موازی هم باشند تا تجانس هم باشند.

گزینه‌ی ۲ درست است. قضیه‌ی کتاب درسی.

علت نادرستی گزینه‌ی ۳: محور بازتاب دو محور تقاطع، نیمسازهای داخلی و خارجی دو خط است که به این ترتیب دو محور باز تاب دارند.

گزینه‌ی ۴ نادرست است زیرا بازتاب متوالی نسبت به هردو محور متقاطع، یک دوران تحت زاویه‌ی دو برابر زاویه‌ی بین دو خط است.

۴۱- در مثلث ABC اگر $AB = AC$ باشد، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

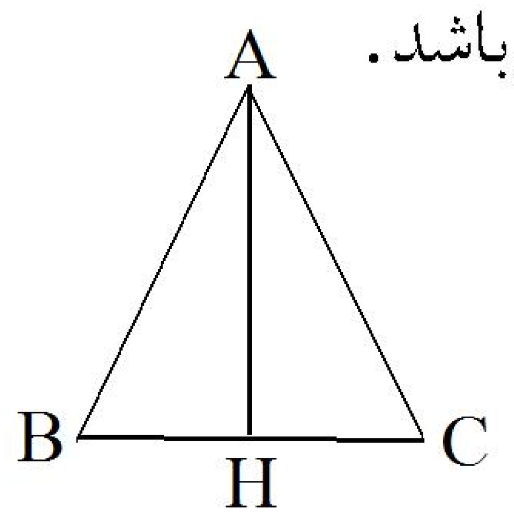
۱) نقطه‌ی B دوران یافته‌ی نقطه‌ی C بمرکز A با زاویه‌ی ۶۰ درجه است.

۲) نقطه‌ی B بازتاب نقطه‌ی C نسبت به نقطه‌ی A است.

۳) ضلع AC بازتاب ضلع AB نسبت به میانه ی وارد بر ضلع BC است.

۴) ضلع AC انتقال ضلع AB تحت بردار $\overrightarrow{BC}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر ارتفاع AH را ترسیم کنیم، آنگاه AH عمود منصف ضلع BC می‌باشد.



پس داریم:

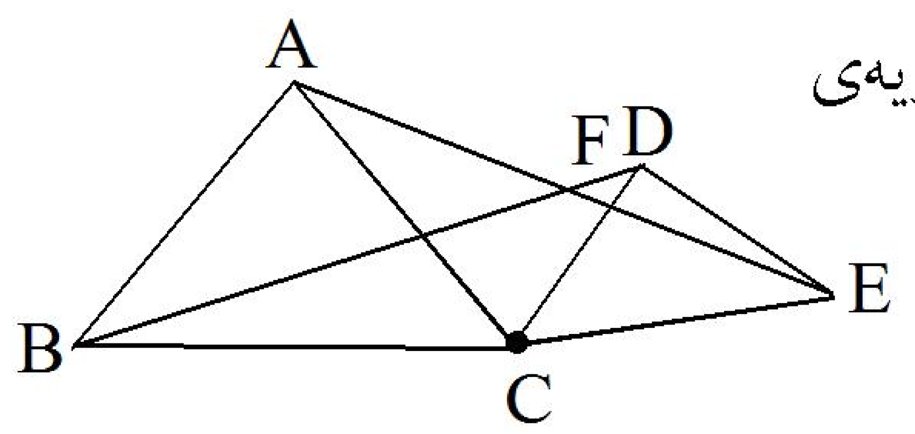
$$A \xrightarrow[\text{به خط } AH]{\text{تحت بازتاب نسبت}} A$$

$$B \xrightarrow[\text{به خط } AH]{\text{تحت بازتاب نسبت}} C$$

$$\Rightarrow AB \xrightarrow[\text{نسبت به خط } AH]{\text{تحت بازتاب}} AC$$

پس AB و AC بازتاب یکدیگر نسبت به AH هستند.

۴۲- در شکل مقابل مثلث‌های $\widehat{ABC}$ و $\widehat{DEC}$ متساوی‌الاضلاع هستند اگر زاویه‌ی $\widehat{DCA}$ برابر ۵۰° باشد آنگاه زاویه‌ی $\widehat{AFB}$ برابر کدام است؟



۱) ۳۰° ۲) ۵۰°

۳) ۶۰° ۴) ۷۵°

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} DC = EC \\ \widehat{DCE} = ۶۰ \end{array}\right\} \Rightarrow E \xrightarrow[\text{به مرکز } c]{\text{تحت دوران ۶۰}} D$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = BC \\ \widehat{ACB} = ۶۰ \end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow[\text{به مرکز } c]{\text{تحت دوران ۶۰}} B$$

$$\Rightarrow AE \xrightarrow[\text{به مرکز } c]{\text{تحت دوران ۶۰ درجه}} BD$$

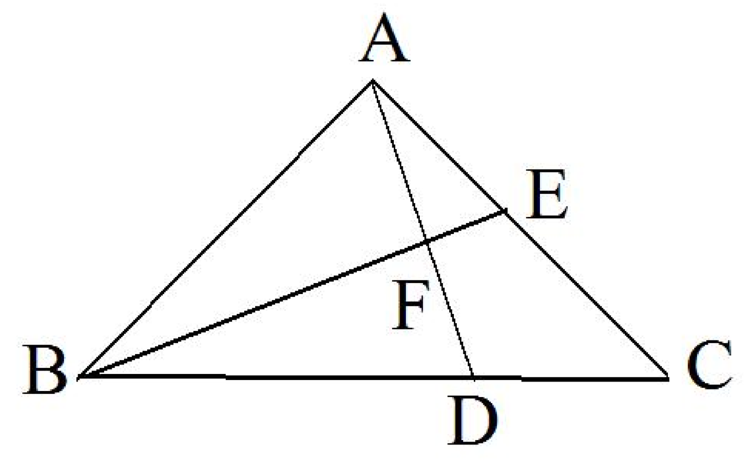
آز آنجایی که زاویه‌ی بین هر خط و دوران یافته‌ی آن برابر زاویه‌ی دوران است و AE و BD دوران ۶۰ درجه یکدیگر به مرکز c هستند نتیجه می‌گیریم: $\widehat{AFB} = ۶۰$

۴۳- دو خط متقاطع d و d' مفروضند با کدام یک از تبدیل‌های زیر می‌توان خط d را به d' تصویر کرد؟

۱) انتقال ۲) تجانس ۳) بازتاب نسبت به خط ۴) دوران ۱۸۰°

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تبدیل‌های انتقال، تجانس و بازتاب نسبت به نقطه، شیب را حفظ می‌کنند پس نمی‌توانند خط d را به خط متقاطع با آن تصویر نمایند. (محور تقارن نیمساز زاویه‌ی بین دو خط می‌باشد)

۴۴- اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد و BD = CE آنگاه پاره خطهای AD و BE دوران‌های همدیگر نسبت به چه مرکز و با چه زاویه‌ای هستند؟



۱) دوران ۶۰ درجه به مرکز O نقطه‌ی تلاقی میانه‌های مثلث ABC

۲) دوران ۶۰ درجه به مرکز F

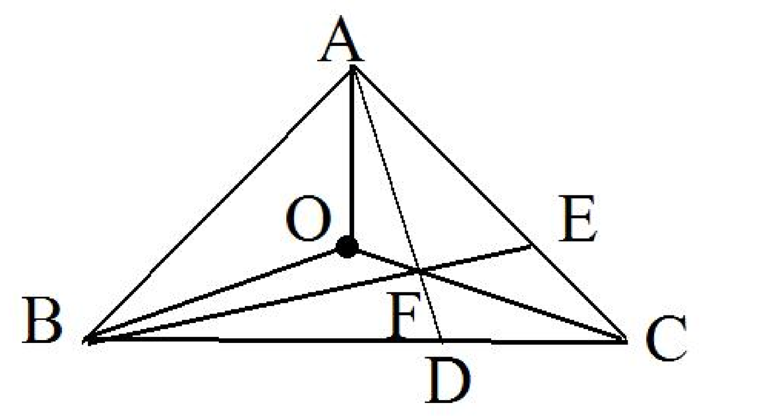
۳) دوران ۱۲۰ درجه به مرکز O نقطه‌ی تلاقی میانه‌های مثلث ABC

۴) دوران ۱۲۰ درجه به مرکز F

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر O نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای مثلث ABC باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ \widehat{AOB} = ۱۲۰ \end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow[\text{درجه به مرکز } O]{\text{تحت دوران } ۱۲۰} B$$

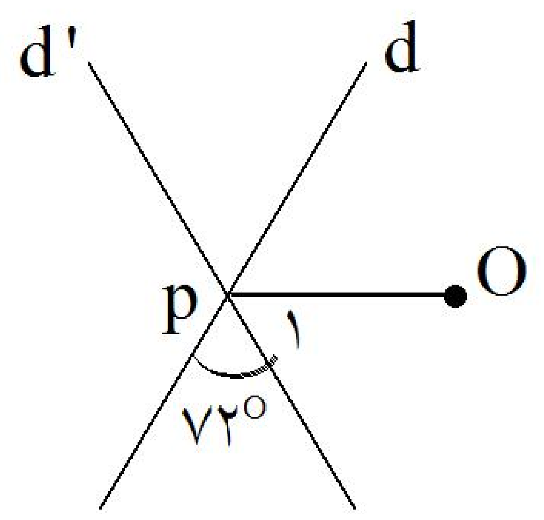
$$\left.\begin{array}{l} OE = OD \\ \widehat{EOD} = ۱۲۰ \end{array}\right\} \Rightarrow D \xrightarrow[\text{درجه به مرکز } O]{\text{تحت دوران } ۱۲۰} E$$



$$\Rightarrow AD \xrightarrow[\text{درجه به مرکز } O]{\text{تحت دوران } ۱۲۰} BE$$

۴۵- اگر دو خط d و d' در نقطه‌ی P متقاطع باشند و این دو خط دوران یکدیگر به مرکز O و زاویه‌ی ۷۲ درجه باشند، آنگاه OP با خط d چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) ۳۶° ۲) ۴۲° ۳) ۵۴° ۴) ۵۸°

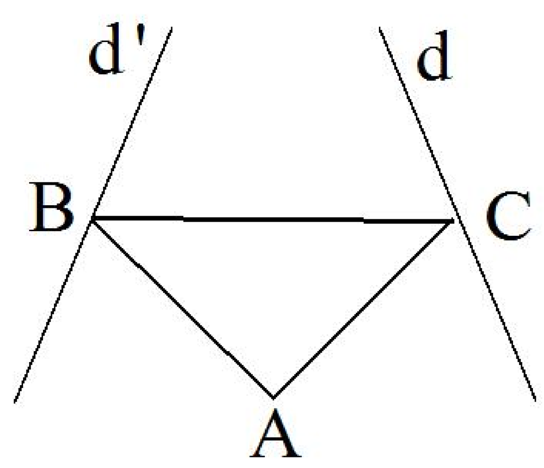


گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اولاً مرکز دوران روی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط است و در ضمن زاویه‌ی بین دو خط برابر ۷۲ درجه است.

$$P_۱ = \frac{۱۸۰ - ۷۲}{۲} = ۵۴^\circ$$

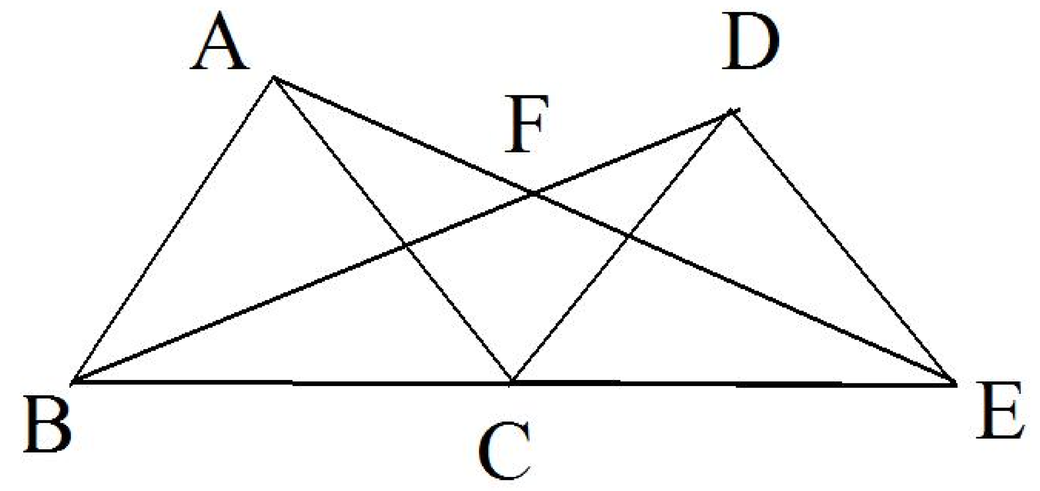
۴۶- اگر d و d' دو خط و A نقطه‌ی مفروضی باشد، آنگاه برای رسم مثلث متساوی‌الاضلاع به رأس A بطوری که دو رأس دیگرش روی خطهای d و d' باشند، کدام تبدیل بکار می‌رود؟

۱) انتقال ۲) دوران ۳) تجانس ۴) بازتاب



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر ABC مثلث متساوی‌الاضلاع مورد نظر باشد، آنگاه رئوس B و C دوران یکدیگر به مرکز A و زاویه‌ی ۶۰ درجه هستند. به همین علت می‌توان از تبدیل دوران برای رسم مثلث استفاده نمود.

۴۷- اگر دو مثلث $\widehat{ABC}$ و $\widehat{DEC}$ متساوی‌الاضلاع باشند آنگاه در مورد پاره‌خطهای BD و AE کدام گزینه درست است؟



۱) دوران یکدیگر به مرکز F و زاویه‌ی ۶۰ درجه هستند.

۲) دوران یکدیگر به مرکز F و زاویه‌ی ۱۲۰ درجه هستند.

۳) دوران یکدیگر به مرکز C و زاویه‌ی ۶۰ درجه هستند.

۴) دوران یکدیگر به مرکز C و زاویه‌ی ۱۲۰ درجه هستند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} DC = EC \\ \widehat{DCE} = ۶۰ \end{array}\right\} \Rightarrow E \xrightarrow[\text{بمرکز } C]{\text{تحت دوران } ۶۰} D$$

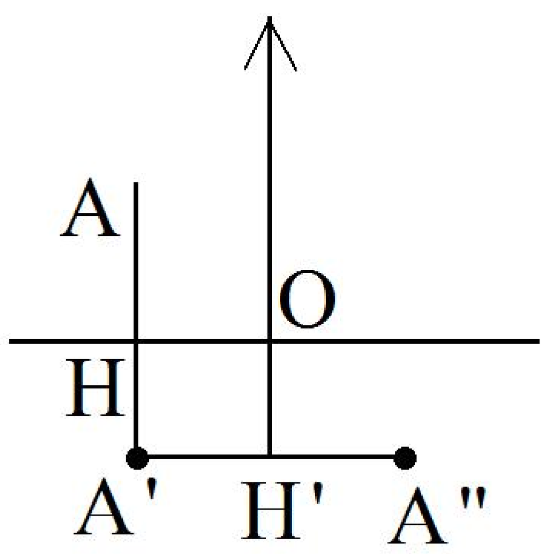
$$\left.\begin{array}{l} AC = BC \\ \widehat{ACB} = ۶۰ \end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow[\text{بمرکز } C]{\text{تحت دوران } ۶۰} B$$

$$\Rightarrow AE \xrightarrow[\text{بمرکز } C]{\text{تحت دوران } ۶۰} BD$$

۴۸- ترکیب دو تقارن محوری که محورهای آن‌ها بر هم عمود است، کدام تبدیل **نمی‌تواند** باشد؟

۱) انتقال ۲) تجانس ۳) دوران 180° ۴) هر سه

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.



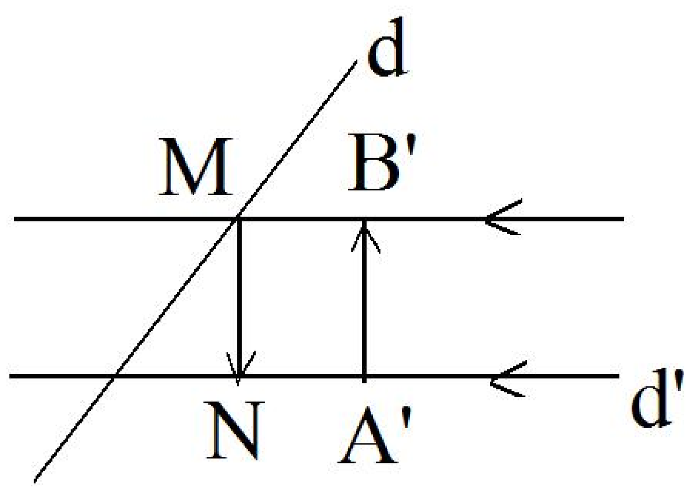
$$\begin{cases} AH = A'H \\ A'H' = H'A" \end{cases} \Rightarrow AO = OA"$$

۱) $A"$ مجانس A به مرکز O و نسبت ۱ - می‌باشد.

۲) $A"$ دوران یافته‌ی A با زاویه‌ی $\theta = 180^\circ$ و به مرکز O است.

۴۹- دو خط متقاطع d و d' و پاره‌خط AB در صفحه آن‌ها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل یک نقطه از خط d' مثل A' را با بردار AB انتقال می‌دهیم تا به نقطه‌ی B' برسیم و از آن‌جا خطی موازی d' رسم می‌کنیم تا خط d را درنقطه‌ی M قطع کند. حال نقطه‌ی M را با بردار BA انتقال می‌دهیم تا نقطه‌ی N واقع برخط d' حاصل می‌شود. اکنون پاره خط MN همان پاره‌خطی است که دو سر آن روی دو خط متقاطع d و d' واقع است و موازی و مساوی AB نیز می‌باشد (زیرا چهارضلعی $MB'A'N$ متوازی الاضلاع است). توجه کنید که دوران ممکن است شیب خط و تجانس ممکن است طول پاره‌خط‌ها را تغییر دهد و به همین دلیل گزینه‌های ۳ و۴ از ابتدا به راحتی حذف می‌شوند.

۵۰- در صفحه‌ای خط d و دو نقطه‌ی A و B در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط d که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه‌ی A و B کم‌ترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

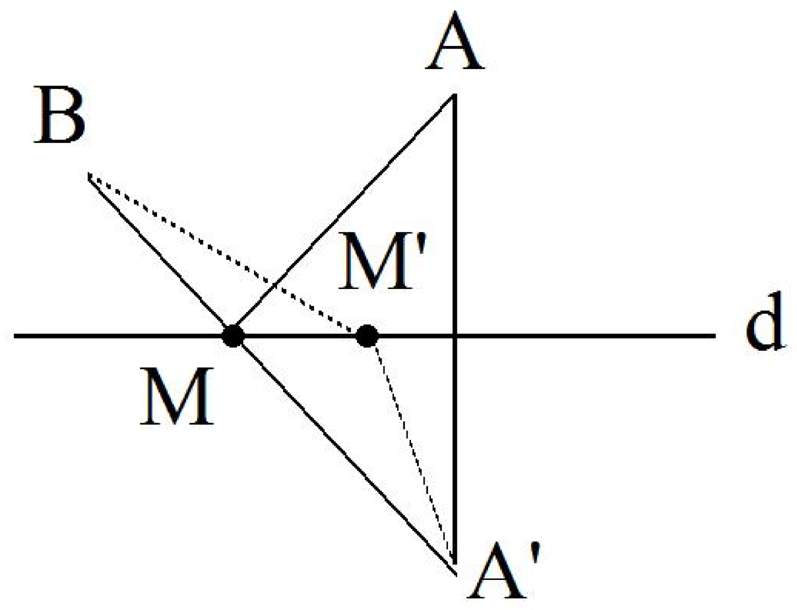
۱) بازتاب ۲) تجانس ۳) دوران ۴) انتقال

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

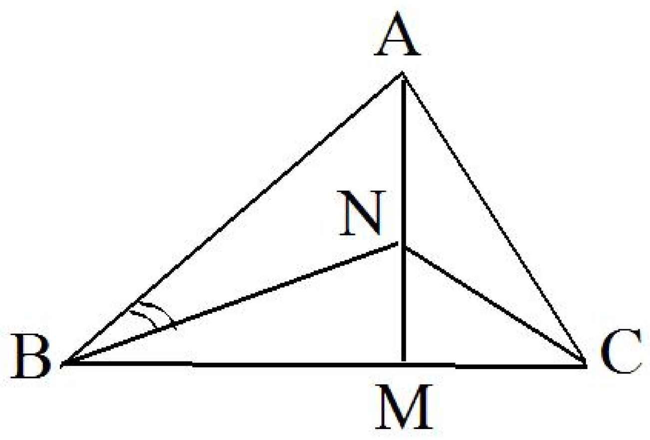
$$\overset{\triangle}{M'A'B}: M'B + M'A' > A'B \Rightarrow M'B + M'A' > MB + MA'$$

$$\xrightarrow{MA = MA'} M'B + M'A' > MB + MA$$

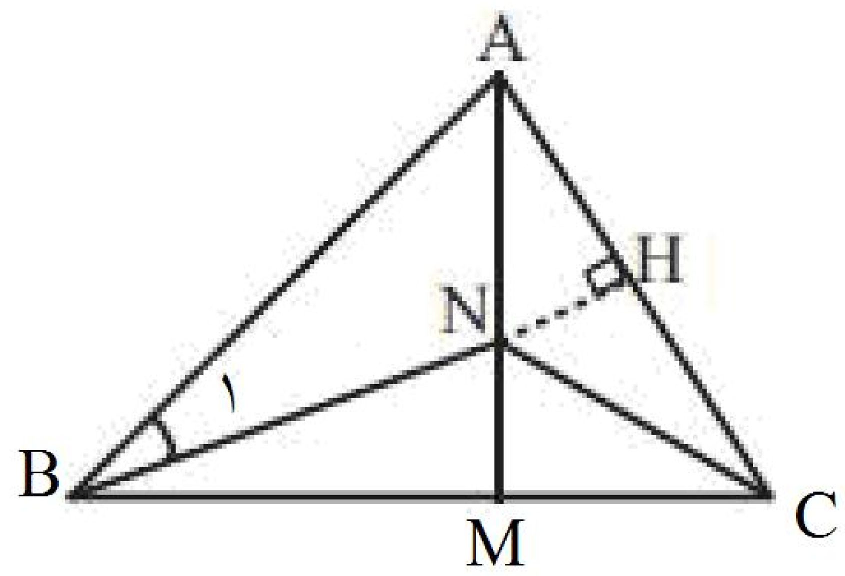
نامساوی اخیر نشان می‌دهد که نقطه‌ی M، نقطه‌ای روی d است که مجموع فاصله‌های آن از A و B، کم‌ترین مقدار ممکن است.



۵۱- در شکل روبه‌رو عمودمنصف‌های AB و NC در نقطه‌ی M روی BC متقاطع‌اند. اگر $\widehat{ABN} = 15^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی A چه‌قدر است؟

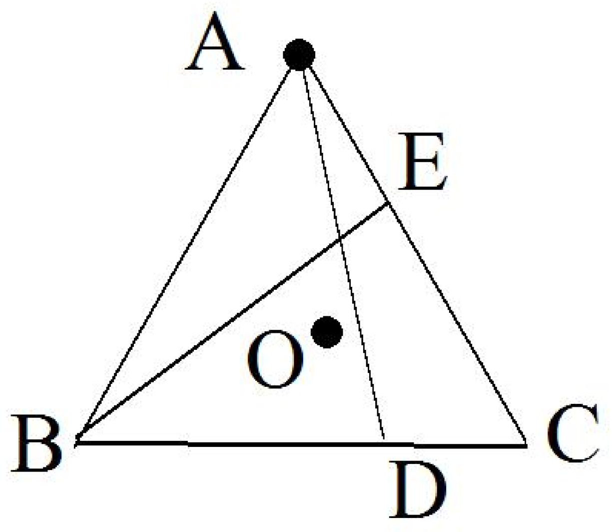


۱) 50°
۲) 45°
۳) 60°
۴) 75°



گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. طبق تعریف دوران، مشخص است که مثلث BMN پس از دوران به شکل AMC خواهد بود. پس: $90^\circ = \widehat{BMN} = \widehat{AMC}$ یعنی زاویه‌ی دوران برابر 90° است و بنابراین BN و AC که دوران یافته‌ی هم هستند بر هم عمود خواهند بود. پس: $\widehat{A} + \widehat{B}_1 = 90^\circ$ و در نتیجه: $\widehat{A} = 75^\circ$.

۵۲- نقطه‌ی O مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $BD = CE$ ، کدام بیان نادرست است؟



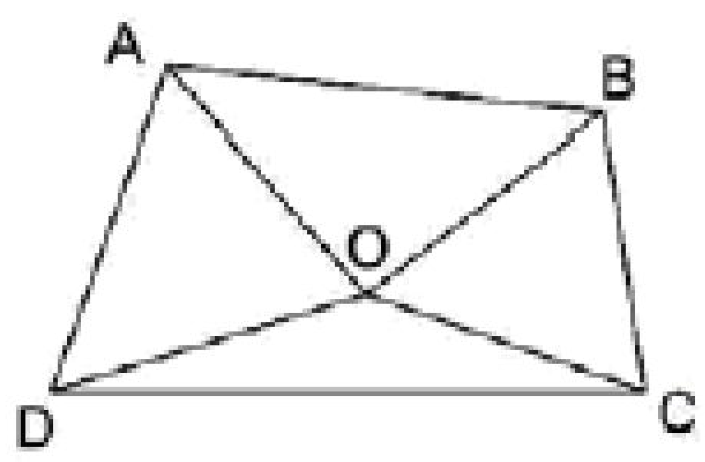
۱) $OE = OD$
۲) $OD \perp BE$
۳) $\widehat{EOD} = 120^\circ$
۴) $\widehat{AOC} = 120^\circ$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث $\overset{\triangle}{OAE}$ و $\overset{\triangle}{OCD}$ مساویند پس $OE = OD$ و از طرفی $\overset{\triangle}{AOC} = 120$ پس $\overset{\triangle}{EOD} = 120$ بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ و۴ درست هستند و در نتیجه گزینه‌ی ۲ غلط می‌باشد.

۵۳- در چهارضلعی شکل مقابل نقطه‌ی O داخل چهارضلعی به گونه‌ای قرار دارد که:

$OA = OD \, , \, OB = OC \, , \, \widehat{DAO} = \widehat{CBO} = 70^\circ$

زاویه‌ی بین دو قطر چهارضلعی ABCD کدام است؟



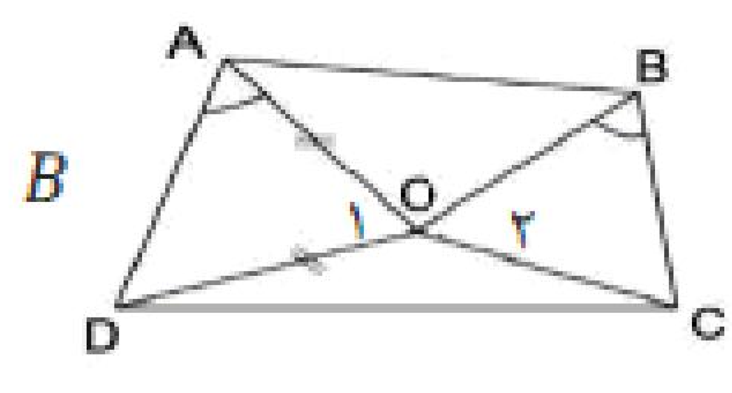
۱) 70° ۲) 20°
۳) 40° ۴) 50°

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$\Delta ADO : \angle \ O_1 = 180 - 2 \times 70^\circ = 40^\circ$

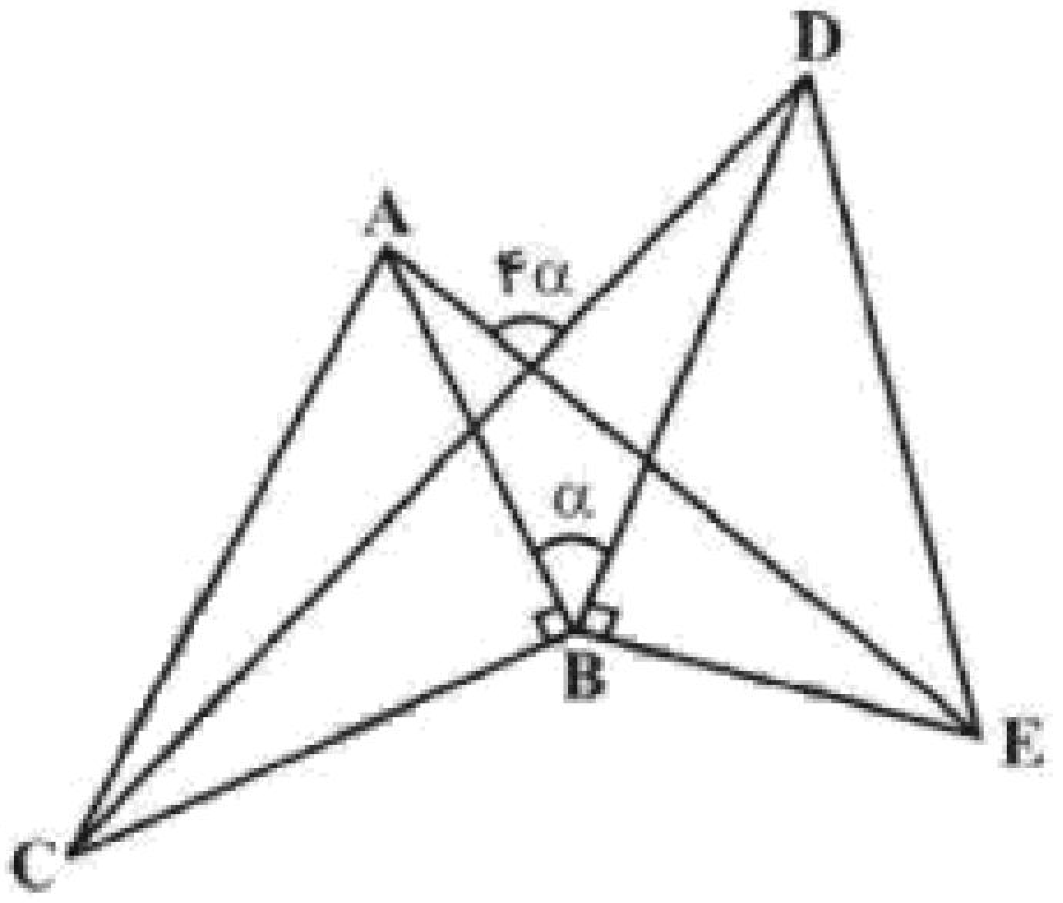
$\Delta BCO : \angle \ O_2 = 40^\circ$

$\rightarrow D = R_O^{40^\circ}(A) \ , \ B = R_O^{40^\circ}(C) \Rightarrow DB = R_O^{40^\circ}(AC)$



پس قطر BD دوران یافته قطر AC حول نقطه‌ی O با زاویه‌ی $+40^\circ$ است و می‌دانیم زاویه‌ی بین دو خط دوران یافته با زاویه‌ی دوران برابر است.

۵۴- در شکل مقابل: $AB = ۳$، $BC = BD = ۴$ و $AC = DE = ۵$.



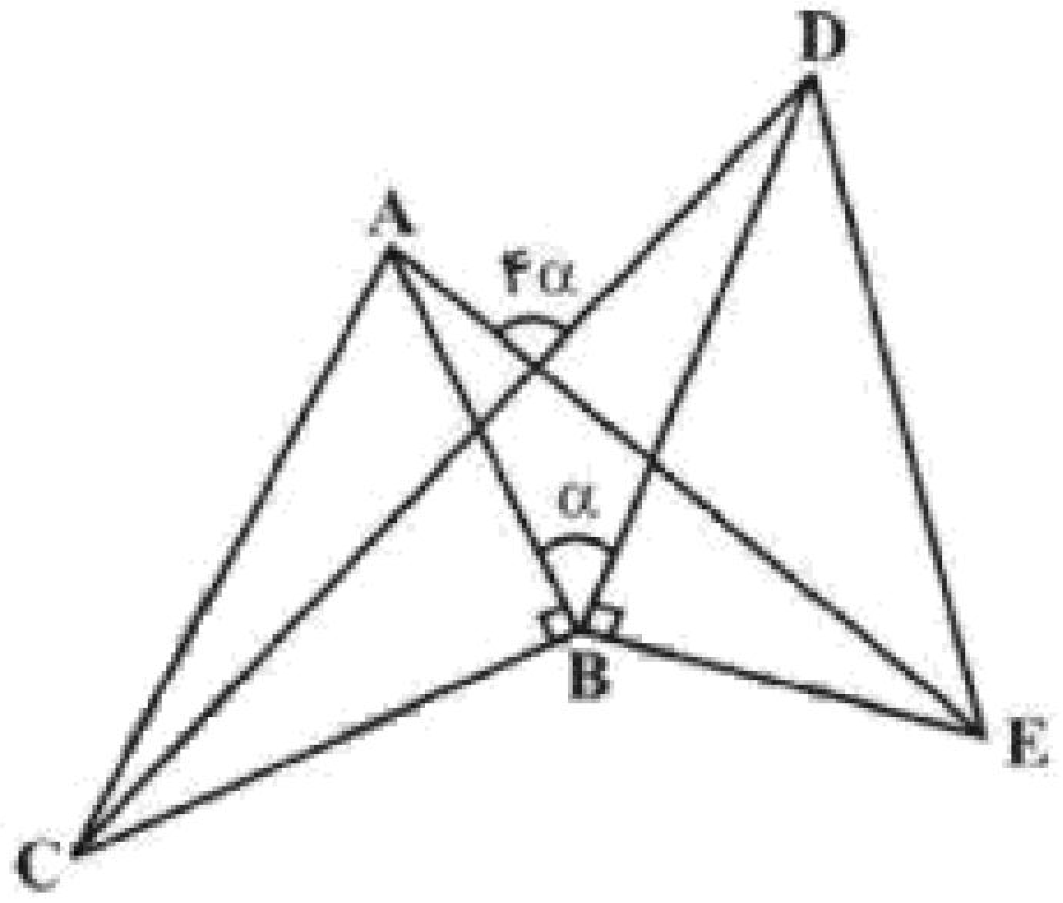
$\alpha = A\hat{B}D$ چند درجه است؟

۱) ۶۰

۲) ۴۵

۳) ۳۰

۴) ۲۲/۵

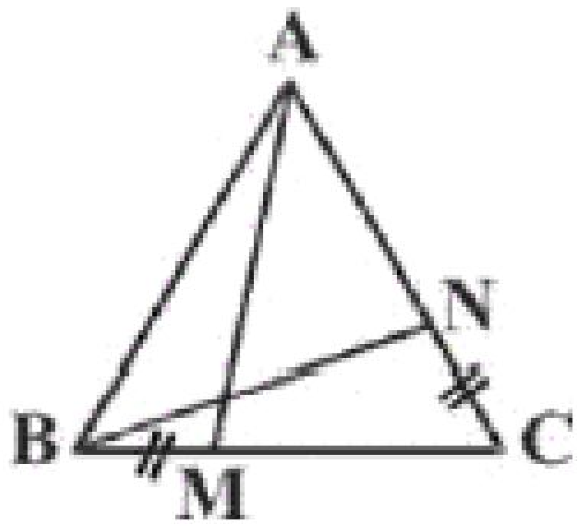


گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

دو خط AE و CD دوران یکدیگر به مرکز B با زاویه‌ی $۹۰ + \alpha$ هستند. می‌دانیم زاویه‌ی بین دو خط که دوران یکدیگر می‌باشند، برابر زاویه‌ی دوران است.

پس داریم: $۹۰^\circ + \alpha = ۴\alpha \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$

۵۵- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و $BM = CN$ است. با کدام تبدیل، مثلث ABM بر مثلث BCN، منطبق می‌شود؟

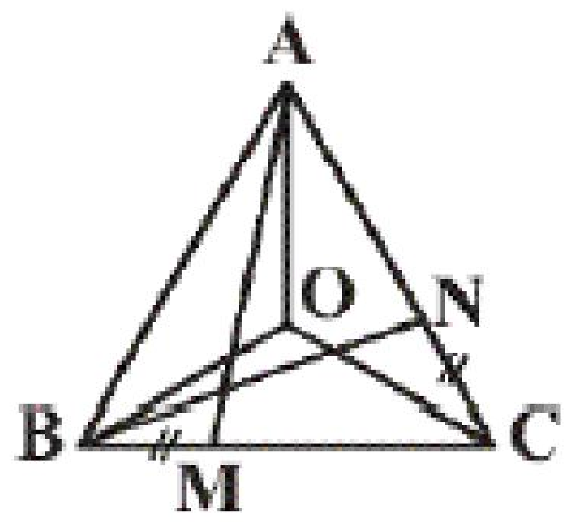


۱) دورانی به مرکز وسط ضلع BC و زاویه‌ی ۱۲۰°

۲) دورانی به مرکز C و زاویه‌ی ۶۰°

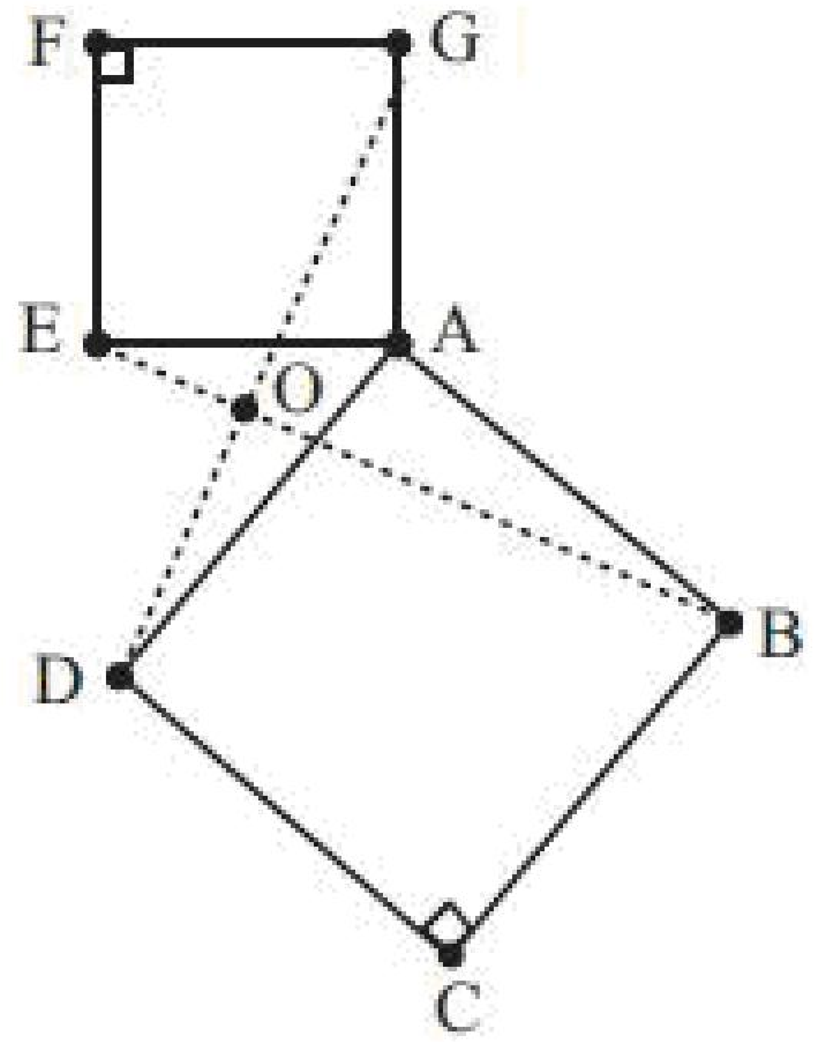
۳) دورانی به مرکز M و زاویه‌ی ۱۲۰°

۴) دورانی به مرکز محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC و زاویه‌ی ۱۲۰°



گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید نقطه‌ی O، محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC باشد. رئوس C و B به ترتیب دوران‌یافته‌ی رئوس B و A به مرکز O و زاویه‌ی ۱۲۰° هستند. پس نتیجه می‌گیریم که مثلث BCN دوران یافته‌ی مثلث ABM به مرکز O و زاویه‌ی ۱۲۰° است.

۵۶- با توجه به شکل روبه‌رو، دو مربع در رأس A مشترک‌اند. پاره‌خط GD با چه زاویه‌ای پاره‌خط EB را قطع می‌کند؟



۱) ۹۰ درجه

۲) ۱۲۰ درجه

۳) ۱۳۵ درجه

۴) ۷۳/۵ درجه

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. به روش تبدیل دوران دو مربع دورانی از هم‌اند که بدین صورت داریم:

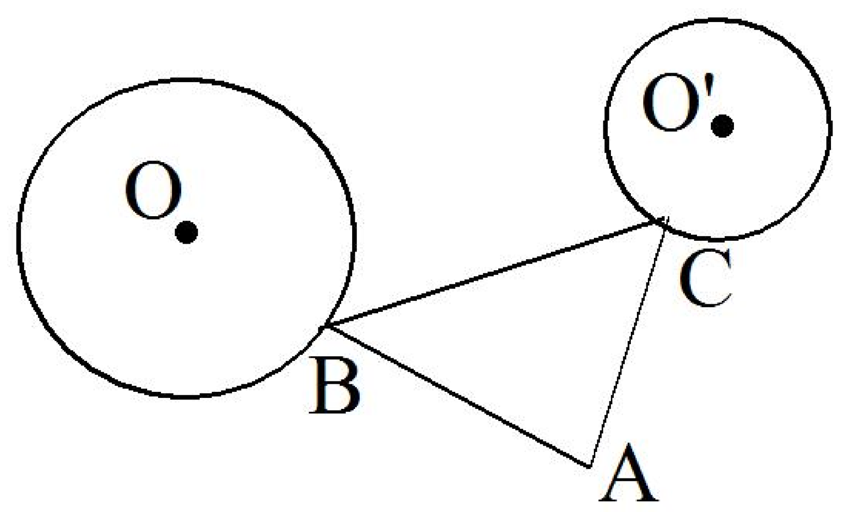
$$\begin{cases} G \xrightarrow{R_{۹۰^\circ}^{A}} E \\ D \xrightarrow{R_{۹۰^\circ}^{A}} B \end{cases} \Rightarrow GD \xrightarrow{R_{۹۰^\circ}^{A}} EB$$

پس GD و EB دوران یک‌دیگراند. با توجه به قضیه‌ی: «اگر دو خط، دورانی از هم باشند، زاویه‌ی بین آن‌ها همان زاویه‌ی دوران است.»، داریم:

$$E\widehat{O}G = ۹۰^\circ$$

۵۷- نقطه‌ی A و دو دایره در یک صفحه مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به رأس A که دو سر قاعده بر روی هریک از این دایره‌ها باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) تجانس ۴) دوران



گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین مثلث مطلوب باشد آن‌گاه نقاط B وC دوران یک‌دیگر به مرکز A و زاویه‌ی ۹۰ درجه هستند بنابراین دوران برای این رسم قابل استفاده است.

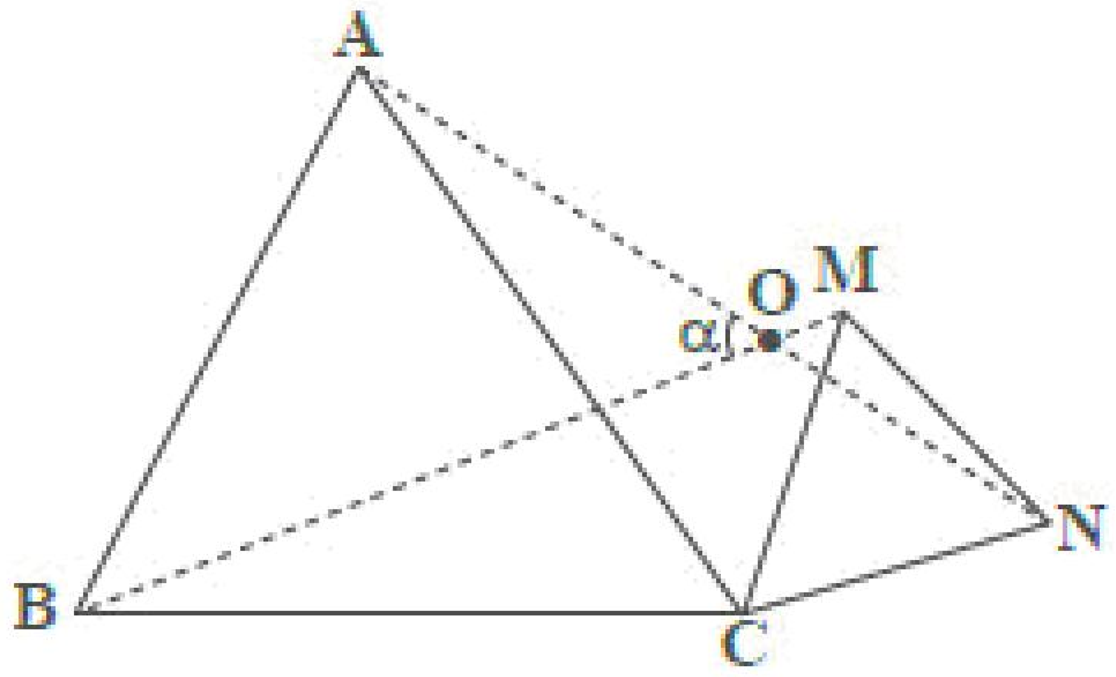
۵۸- دو دایره متخارج و نقطه‌ی O خارج این دو دایره مفروضند. اگر بخواهیم مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی رسم کنیم که یک رأسش O بوده و دورأس دیگرش هر کدام بر روی یکی از دو دایره‌ی مفروض واقع باشد، از چه تبدیلی باید استفاده کنیم؟

۱) دوران ۲) بازتاب ۳) انتقال ۴) تجانس

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دایره‌ی C را حول O به اندازه‌ی ۹۰° دوران می‌دهیم تا دایره‌ی C' را در نقطه‌ی A قطع کند. سپس نقطه‌ی A را -۹۰° دوران می‌دهیم تا نقطه‌ی B بر روی دایره‌ی C (که همان نقطه‌ایست که دوران یافته‌ی آن A شده‌بود) به‌دست آید.

چون شعاع دوران در اثنای دوران ثابت است (OA=OB) و زاویه‌ی دوران ۹۰° است. مثلث ABC همان مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است که دو رأس آن هرکدام روی یکی از Cو'C قرار گرفته‌اند.

۵۹- در شکل زیر، مثلث‌های ABC و CMN متساوی‌الاضلاع هستند.



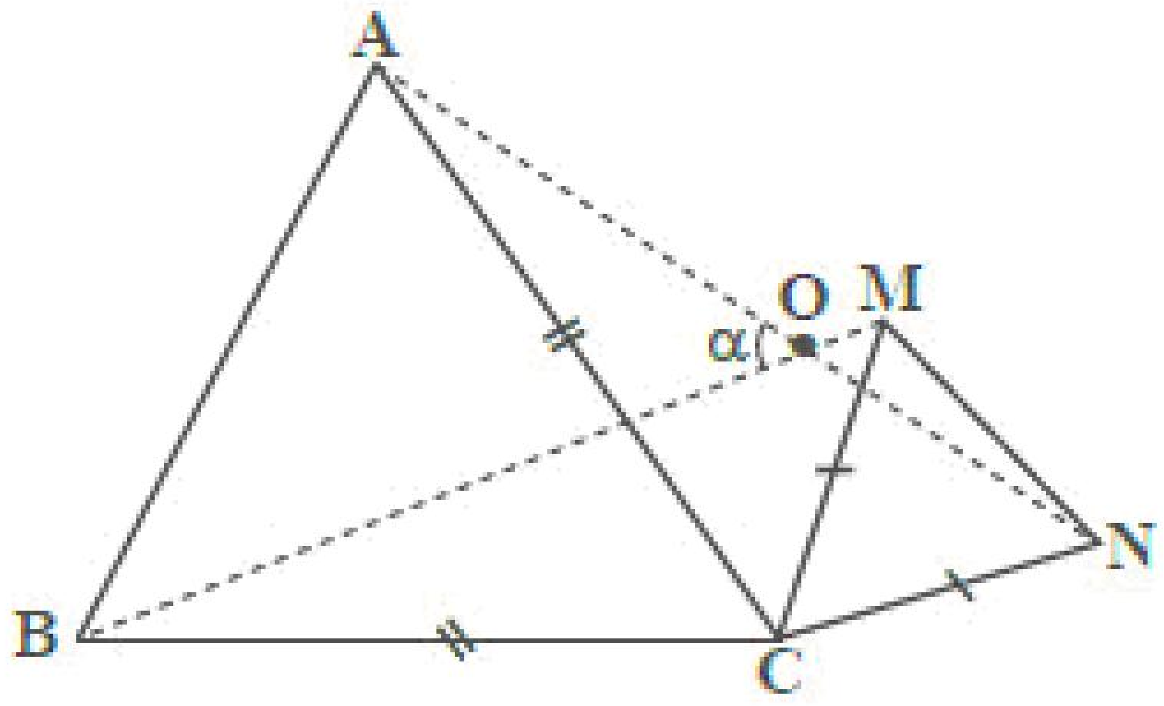
اگر $A\hat{C}M = 40^\circ$ باشد، زاویه‌ی α چند درجه است؟

۱) ۴۰

۲) ۶۰

۳) ۲۰

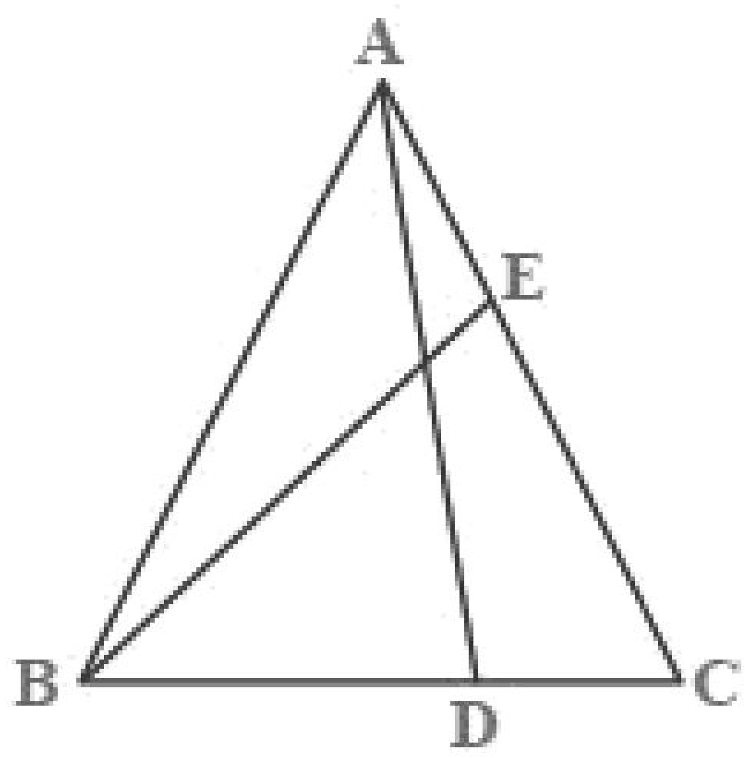
۴) ۵۰



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: دوران به مرکز O و زاویه‌ی α، تبدیلی است که هر نقطه‌ی A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه نظیر می‌کند، به‌طوری‌که:

الف) مرکز دوران یعنی نقطه‌ی O ثابت است. ب) اگر A نقطه‌ای غیر از O باشد، آنگاه $OA = OA'$ و $A\hat{O}A' = \alpha$ در دوران به مرکز C و زاویه‌ی 60°، نقطه‌ی N به M و نقطه‌ی A به B تصویر می‌شود، بنابراین پاره‌خط NA به پاره‌خط MB تصویر می‌شود. حال چون MB دوران‌یافته‌ی NA تحت دوران با زاویه‌ی 60° است، پس زاویه‌ی بین آن‌ها برابر 60° است. در نتیجه $\alpha = 60^\circ$

۶۰- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، داریم $BD = CE$. پاره‌خط های AD و BE ....

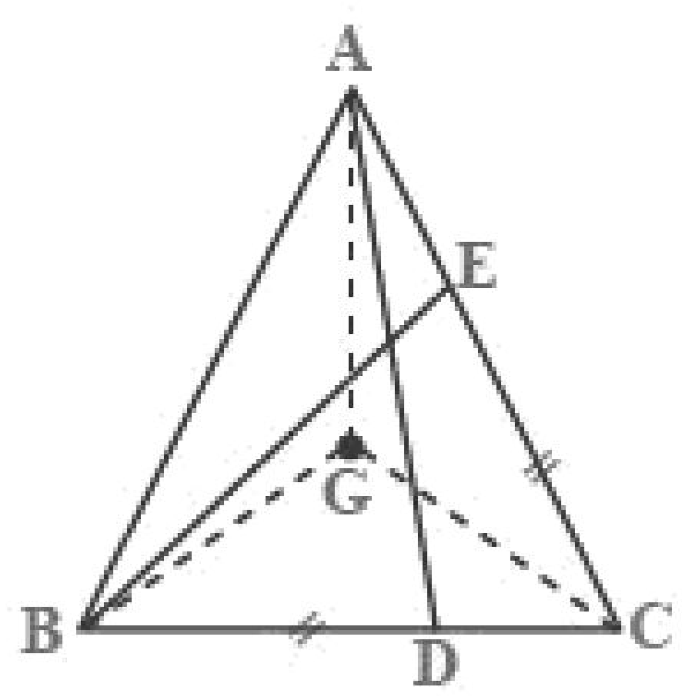


۱) بازتاب محوری یک‌دیگر نسبت به یکی از اضلاع مثلث هستند.

۲) دوران‌یافته‌ی یک‌دیگر در دوران 60° هستند.

۳) بازتاب محوری یک‌دیگر نسبت به یکی از ارتفاعات مثلث هستند.

۴) دوران‌یافته‌ی یک‌دیگر در دوران 120° هستند.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر G مرکز ثقل $\overset{\triangle}{ABC}$ باشد، داریم:

$$B\hat{G}C = C\hat{G}A = A\hat{G}B = 120^\circ$$

در دوران 120° به مرکز G، نقطه‌ی B به C و نقطه‌ی C به A تصویر می‌شود؛ پس BC به CA تصویر می‌شود.

طبق فرض $CE = BD$ است، پس در همین دوران، D به E تصویر می‌شود. بنابراین AD به BE تصویر می‌شود، یعنی AD و BE دوران‌یافته‌ی یک‌دیگر در دوران 120° هستند.

۶۱- در مثلث ABC داریم: $6\hat{A} = 10\hat{B} = 15\hat{C}$ و میانه $AM = 4$ است. مقدار $AB\cos B + AC\cos C$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

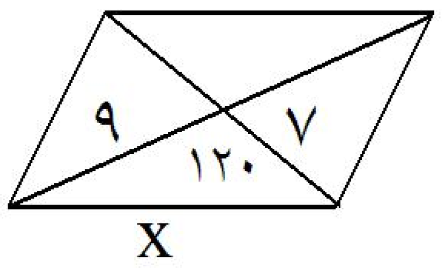
مجموع زاویه‌های مثلث ۱۸۰ درجه است: $\frac{\hat{A}}{5} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{10} = 18$، پس: $\hat{A} = 90^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویه، میانه AM نصف وتر BC است، پس: $BC = 8$.

$$AB\cos B + AC\cos C = BC = 8$$

۶۲- در متوازی‌الاضلاع به قطرهای ۱۴ و ۱۸ واحد زاویه بین دو قطر ۶۰ درجه است. ضلع بزرگ‌تر کدام است؟

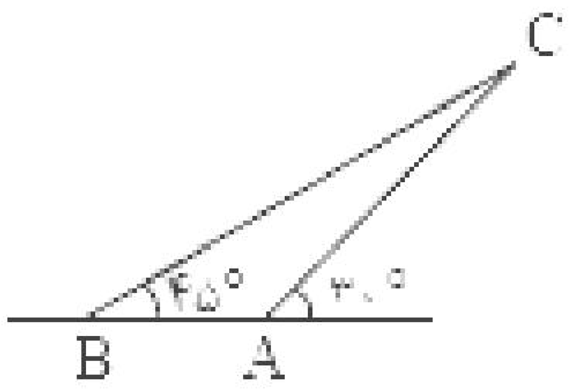
۱) $\sqrt{۱۹۳}$ ۲) $\sqrt{۱۹۵}$ ۳) $\sqrt{۱۸۲}$ ۴) $\sqrt{۱۸۷}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو قطر متوازی‌الاضلاع یک‌دیگر را نصف می‌کنند. در مثلثی با دو ضلع ۹ و ۷ واحد و زاویه بین آن‌ها ۱۲۰ درجه ضلع سوم محاسبه می‌شود.



$$x^۲ = ۷^۲ + ۹^۲ - ۲(۶۳)\text{Cos}\,۱۲۰^\circ = ۴۹ + ۸۱ + ۶۳ = ۱۹۳ \Rightarrow x = \sqrt{۱۹۳}$$

۶۳- موشکی از نقطه‌ی A تحت زاویه‌ی ۳۰° نسبت به سطح زمین و موشک دیگری از نقطه‌ی B تحت زاویه‌ی ۴۵° نسبت به سطح زمین به طور مایل و روی خط راست پرتاب می‌شوند. اگر موشک اول بعد از طی ۶ متر به نقطه‌ی C برسد، موشک دوم پس از طی چند متر به همان نقطه می‌رسد؟



۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{b}{\text{Sin}\,\hat{B}} = \frac{a}{\text{Sin}\,\hat{A}} \Rightarrow \frac{۶}{\text{Sin}\,۴۵^\circ} = \frac{a}{\text{Sin}\,۱۵۰^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{۶}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{a}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow a = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = ۳\sqrt{۲}$$

۶۴- اگر در مثلث ABC ، $\hat{A} = ۴۵^\circ$ ، $\hat{C} = ۶۰^\circ$ و $a = ۶\sqrt{۲}$ ، مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

۱) $۱۸\left(\sqrt{۱۲} + ۶\right)$ ۲) $\frac{۹}{۲}\left(\sqrt{۱۲} + ۶\right)$ ۳) $۱۸\left(\sqrt{۱۲} - ۶\right)$ ۴) $۹\left(\sqrt{۱۲} + ۶\right)$

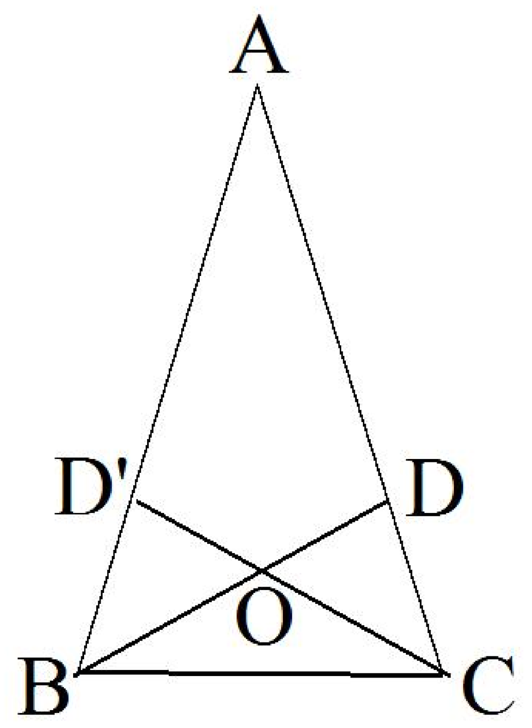
گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\hat{B} = ۱۸۰ - (۴۵ + ۶۰) = ۷۵^\circ$$

$$\frac{a}{\text{Sin}\,A} = \frac{c}{\text{Sin}\,C} \Rightarrow \frac{۶\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow c = ۶\sqrt{۳}$$

$$S = \frac{۱}{۲}a\,\text{Sin}\,\hat{B} = \frac{۱}{۲} \times ۶\sqrt{۲} \times ۶\sqrt{۳}\,\text{Sin}\,۷۵^\circ = ۱۸\sqrt{۶} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۹}{۲}\left(\sqrt{۱۲} + ۶\right)$$

$$\text{Sin}\,۷۵^\circ = \text{Sin}\,(۴۵ + ۳۰) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲}\right)$$



۶۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، $AB = AC = ۲BC = ۶$ است.
نیم‌سازهای BD و CD' یک‌دیگر را به چه نسبتی تقسیم می‌کنند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.
در هر مثلث، نیم‌ساز هر زاویه ضلع مقابل را به نسبت اضلاع آن زاویه تقسیم می‌کند. به عبارت دیگر:

$$\frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AB} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \;,\; DC + AD = ۶ \Rightarrow DC = ۲ \;,\; AD = ۴$$

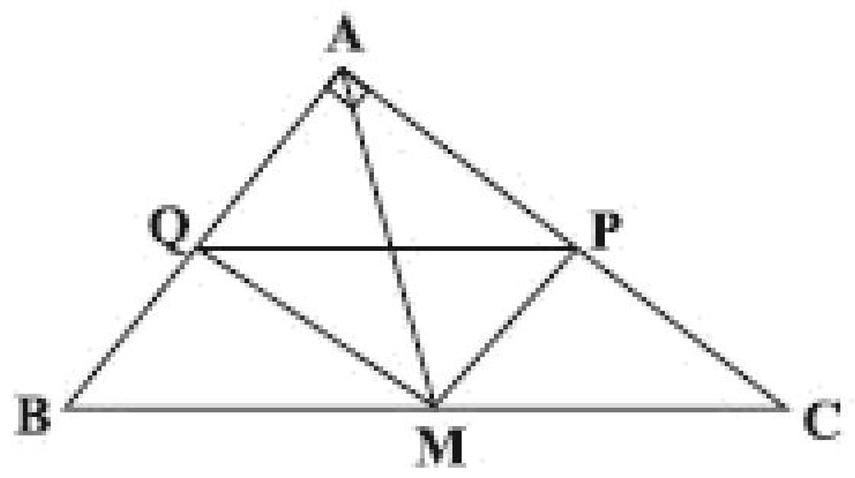
از طرف دیگر CO نیم‌ساز مثلث BDC نیز محسوب می‌شود، پس:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{DC}{BC} = \frac{۲}{۳}$$

در نتیجه نیم‌سازها یک‌دیگر را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ قطع می‌کنند.

۶۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، نقطه‌ی M وسط وتر BC است. نیمسازهای دو زاویه‌ی AMC و AMB، اضلاع AV و AB را به ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کنند. نسبت $\frac{PQ}{BC}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$



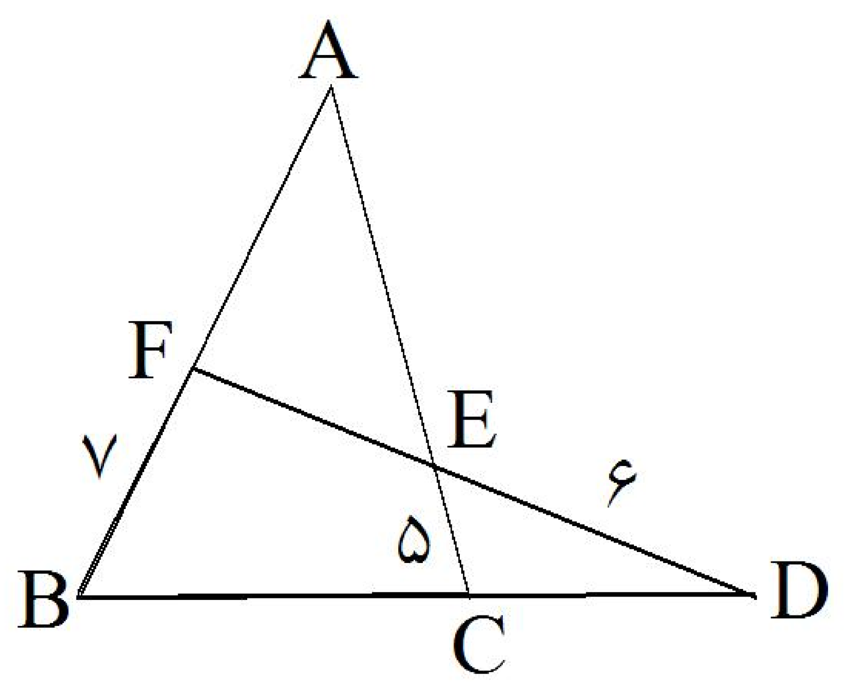
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ، AM (میانه‌ی وارد بر وتر) نصف وتر BC یعنی برابر با BM و CM است.
از طرفی طبق تمرین ۱۵ صفحه‌ی ۲۲ کتاب درسی می‌دانیم $PQ \| BC$.

بنابراین طبق قضیه‌ی تالس داریم: $\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB}$

در مثلث ABM طبق قضیه‌ی نیمسازها می‌توان نوشت: $\frac{AQ}{QB} = \frac{AM}{BM} = ۱$

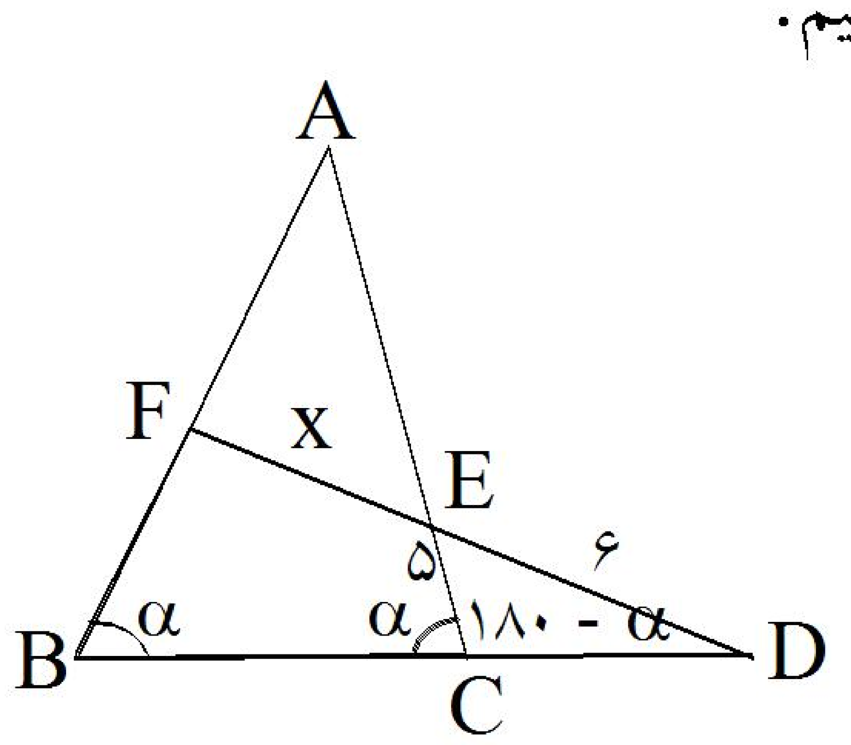
بنابراین $AQ = QB$ و در نتیجه $\frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{۱}{۲}$

۶۷- در شکل مقابل مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است. با توجه به اندازه‌های BF ، EC و ED ، اندازه‌ی EF کدام است؟



۱) ۵
۲) ۳
۳) ۴/۴
۴) ۲/۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در دو مثلث $\overset{\triangle}{CED}$ و $\overset{\triangle}{BDF}$ قضیه سینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{CDE}: \dfrac{۵}{\sin D} = \dfrac{۶}{\sin(۱۸۰ - \alpha)} \\ \overset{\triangle}{BDF}: \dfrac{۷}{\sin D} = \dfrac{۶ + x}{\sin \alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۵}{۷} = \frac{۶}{۶ + x}$$

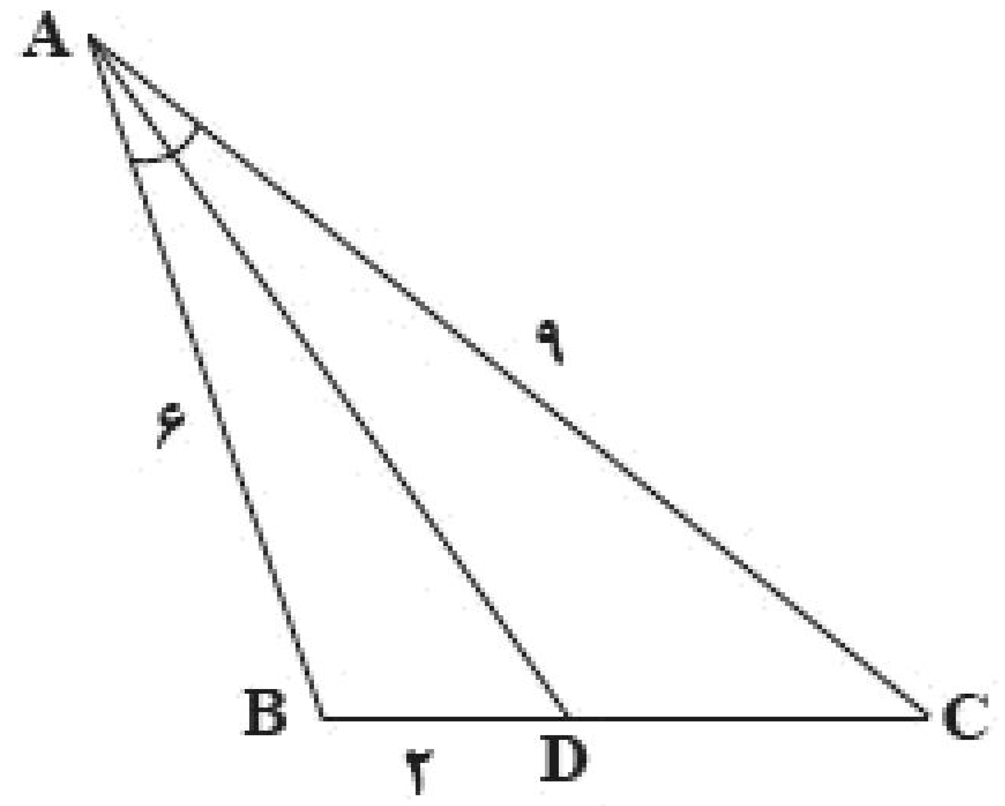
$$\Rightarrow ۳۰ + ۵x = ۴۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

۶۸- در مثلث ABC که $AB = ۶$ و $AC = ۹$ است، نیمساز AD را رسم کرده‌ایم. اگر $BD = ۲$ باشد، اندازه‌ی ضلع BC کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته (قضیه‌ی نیمساز داخلی): در هر مثلث نیمساز هر زاویه‌ی داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

طبق قضیه‌ی نیمساز داخلی داریم:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow[AB = ۶\,,\, AC = ۹]{BD = ۲} \frac{۲}{DC} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow DC = ۳$$

$$\Rightarrow BC = BD + DC = ۲ + ۳ = ۵$$

۶۹- در مثلثی به اضلاع ۵,۷,۹ واحد، کسینوس بزرگ‌ترین زاویه آن کدام است؟

۱) ۰/۲- ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۱-

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در هر مثلث ABC داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\,\text{Cos}\,A \Rightarrow ۸۱ = ۲۵ + ۴۹ - ۷۰\,\text{Cos}\,A \Rightarrow \text{Cos}\,A = -\frac{۷}{۷۰} = -۰/۱$$

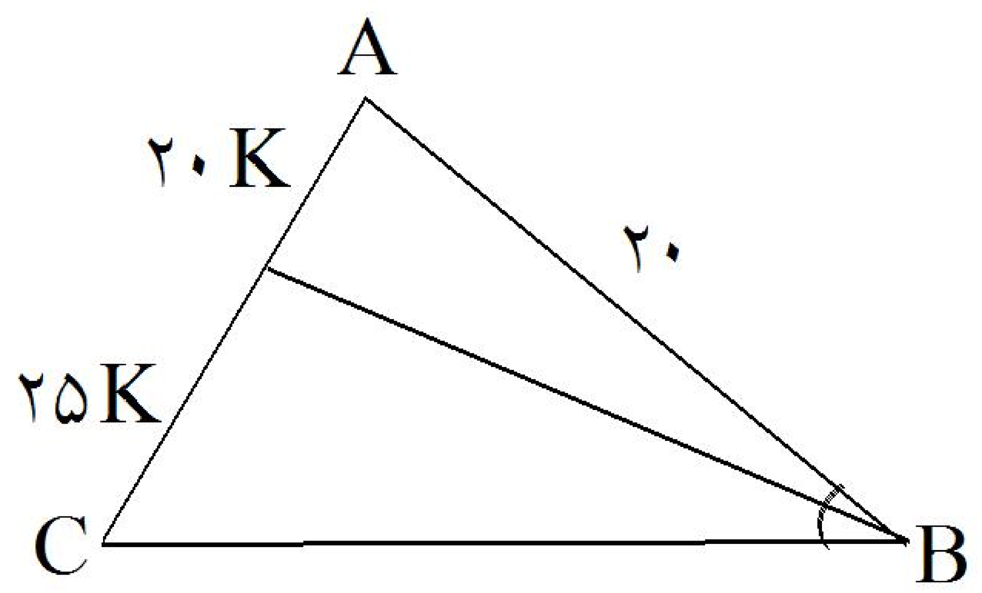
۷۰- ضلع‌های مثلث با اعداد ۲، ۴ و ۵ متناسب هستند. نیمساز BD کوچک‌ترین ضلع یعنی AC را به دو پاره‌خط AD و CD تقسیم می‌کند. اگر AC ، ۱۰ واحد باشد طول پاره‌خط ایجاد شده روی AC کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲}$ ۴) $\frac{۴۰}{۹}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اضلاع مثلث را $۲x$ و $۴x$ و $۵x$ فرض می‌کنیم چون $AC = ۱۰$ پس $x = ۵$ و در نتیجه $AB = ۲۰$ و $BC = ۲۵$ می‌باشد. حال چون BD نیم‌ساز است پس $AD = ۲۰k$ و $DC = ۲۵k$ و در نتیجه

$$۲۰k + ۲۵k = ۱۰ \Rightarrow k = \frac{۱۰}{۴۵} = \frac{۲}{۹} \Rightarrow AD = ۲۰ \times \frac{۲}{۹} = \frac{۴۰}{۹}$$

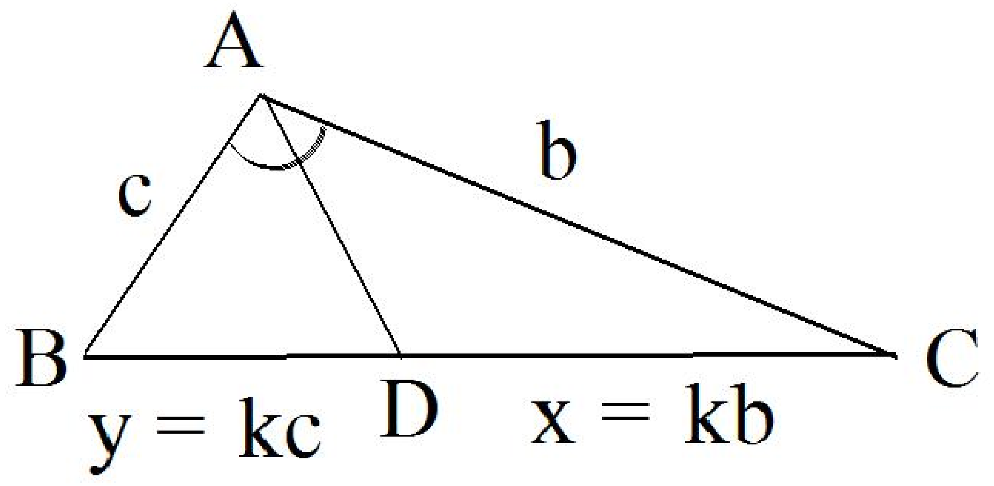
نیم‌ساز ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر قطع می‌کند.



۷۱- در مثلث ABC ، AD نیم‌ساز زاویه A با ضلع BC در نقطه D برخورد می‌کند. اگر $BD = y$ و $CD = x$ باشد، کدام مورد درست است؟

۱) $\frac{x}{a} = \frac{b}{b+c}$ ۲) $\frac{y}{a} = \frac{a}{b+c}$ ۳) $\frac{x}{b} = \frac{a}{a+c}$ ۴) $\frac{x}{y} = \frac{c+b}{b}$

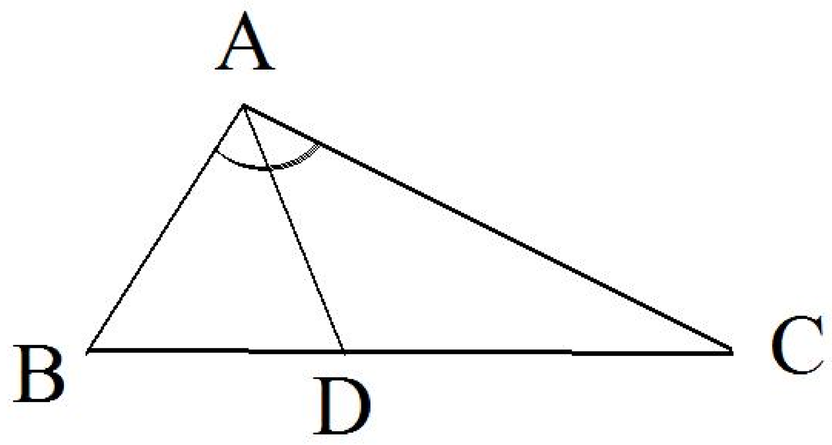
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به قضیه «در هر مثلث، نیم‌ساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند» در نتیجه در مثلث ABC داریم:



$$\frac{y}{x} = \frac{c}{b} \Rightarrow \begin{cases} \text{ترکیب در مخرج} \quad \frac{c}{b+c} = \frac{y}{y+x} \Rightarrow \frac{c}{b+c} = \frac{y}{a} \Rightarrow \frac{y}{c} = \frac{a}{b+c} \\ \text{ترکیب در صورت} \quad \frac{c+b}{b} = \frac{y+x}{x} \Rightarrow \frac{b+c}{b} = \frac{a}{x} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{b+c} \end{cases}$$

۷۲- در مثلث ABC ، نقطه D روی خط BC داده شده است. اگر $AC = ۸$، $AB = ۴$ و هریک از دو زاویه $D\hat{A}B$ و $C\hat{A}D$ برابر ۶۰° باشد، طول AD کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون دو زاویه $D\hat{A}B$, $C\hat{A}D$ برابرند بنابراین AD نیم‌ساز مثلث ABC است و بنابر قضیه قطعات ایجاد شده به نسبت اضلاع مجاور هستند یعنی $CD = ۲x$ و $BD = x$ ⇐ $CD = ۸k$ ،$BD = ۴k$ فرض کنید $AD = y$ باشد با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث‌های ACD , ADB می‌توان نوشت

$$\begin{cases} x^۲ = ۱۶ + y^۲ - ۸y\operatorname{Cos} ۶۰ \\ ۴x^۲ = ۶۴ + y^۲ - ۱۶y\operatorname{Cos} ۶۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۴x^۲ = -۶۴ - ۴y^۲ + ۳۲y\operatorname{Cos} ۶۰ \\ ۴x^۲ = ۶۴ + y^۲ - ۱۶y\operatorname{Cos} ۶۰ \end{cases}$$

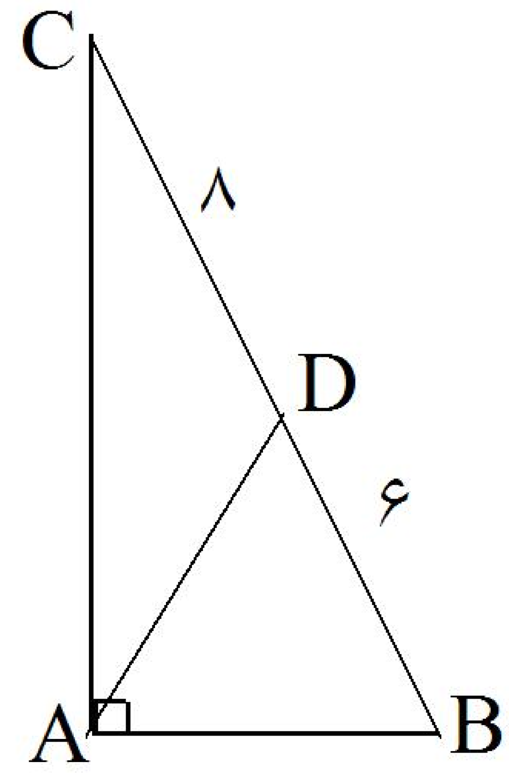
$$۰ = -۳y^۲ + ۱۶y\operatorname{Cos} ۶۰$$

$$\Rightarrow ۳y^۲ - ۸y = ۰ \Rightarrow y(۳y - ۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۰ \quad \text{غ.ق.ق} \\ y = \frac{۸}{۳} \end{cases}$$

۷۳- در مثلث قائم‌الزاویه $ABC\ (\hat{A} = ۹۰)$، نیم‌ساز AD روی وتر قطعاتی به طول ۶ و ۸ ایجاد می‌کند، تفاضل دو ضلع قائمه مثلث کدام است؟

۱) ۱/۴ ‏ ‏ ۲) ۲/۱ ‏ ‏ ۳) ۲/۸ ‏ ‏ ۴) ۳/۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از این‌که AD نیم‌ساز است (نیم‌ساز هر زاویه داخلی ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند) می‌توان نوشت:

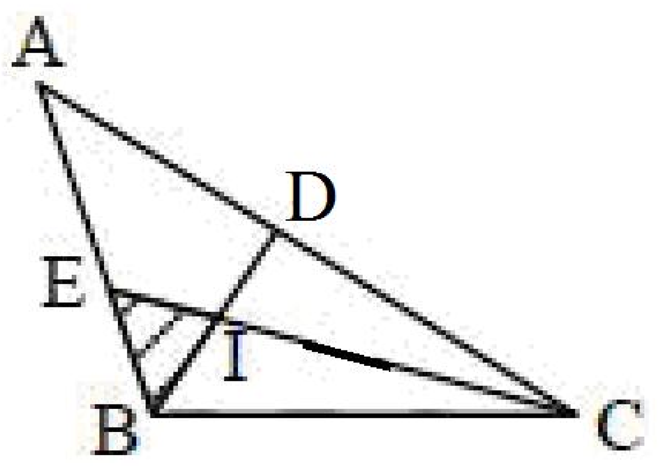


نیم ساز $AD \rightarrow \begin{cases} AB = ۶x \\ AC = ۸x \end{cases}$

در مثلث قائم الزاویه ABC ‏ $\begin{cases} BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow ۱۴^۲ = ۳۶x^۲ + ۶۴x^۲ \\ \Rightarrow ۱۰۰x^۲ = ۱۴^۲ \Rightarrow ۱۰x = ۱۴ \Rightarrow x = ۱/۴ \end{cases}$

$AC - AB = ۸x - ۶x = ۲x = ۲(۱/۴) = ۲/۸$

۷۴- در مثلث ABC، $AB = ۱۵\ ,\ BC = ۲۰\ ,\ CA = ۲۸$ است. اگر I محل تقاطع دو نیمساز BD و CE باشد، نسبت $\frac{S_{BIE}}{S_{ABC}}$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۵}{۱۸۹}$ ‏ ‏ ۲) $\frac{۲۵}{۲۵۲}$

۳) $\frac{۲۴}{۱۸۹}$ ‏ ‏ ۴) $\frac{۲۴}{۲۵۲}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر BD نیمساز باشد خواهیم داشت:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{AE}{\cancel{EB + AE}^{AB}} = \frac{CA}{CB + CA} \Rightarrow AE = \frac{c.b}{a + b} = ۸/۷۵$$

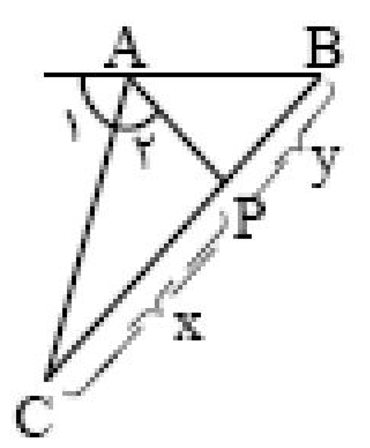
به طریق مشابه: $BE = ۶/۲۵\ ,\ AD = ۱۲\ ,\ CD = ۱۶$

از آن‌جا که نسبت مساحت دو مثلث هم‌ارتفاع، برابر با نسبت قاعده‌های هم‌راستایشان است:

$$\frac{S_{BIE}}{S_{BIA}} = \frac{۲۰}{۴۸},\ \frac{S_{BIA}}{S_{ABD}} = \frac{۱۵}{۲۷},\ \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{۱۲}{۲۸}$$

$$\frac{S_{BIE}}{\cancel{S_{BIA}}} \times \frac{\cancel{S_{BIA}}}{\cancel{S_{ABD}}} \times \frac{\cancel{S_{ABD}}}{S_{ABC}} = \frac{۲۰}{۴۸} \times \frac{۱۵}{۲۷} \times \frac{۱۲}{۲۸} \Rightarrow \frac{S_{BIE}}{S_{ABC}} = \frac{۲۵}{۲۵۲}$$

۷۵- در شکل مقابل، زوایای $\hat{A}_۱$ و $\hat{A}_۲$ با هم برابرند، اگر $AP = ۵$ و $AB = ۸$ باشد، x چند برابر y است؟



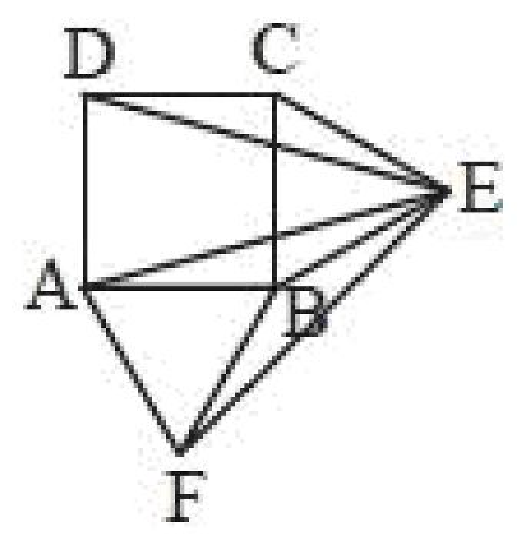
۱) $\frac{۱۵}{۸}$ ‏ ‏ ۲) $\frac{۸}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۳}$ ‏ ‏ ۴) $\frac{۱۳}{۵}$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ‏ قضیه‌ی نیمسازها: $\frac{AP}{AB} = \frac{x}{x + y}$ (در مثلث APB)

$$\Rightarrow \frac{۵}{۸} = \frac{x}{x + y} \Rightarrow \frac{۵}{۳} = \frac{x}{y}$$

۷۶- اگر $ABCD$ مربع و مثلث‌های BCE و ABF متساوی‌الاضلاع باشند، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث AEF به مساحت مثلث DCE برابر کدام است؟



۱) $\sqrt{۳}+۱$ ۲) $\sqrt{۳}+۲$

۳) $۲\sqrt{۳}+۲$ ۴) $۲\sqrt{۳}+۱$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

فرض کنیمضلع مربع برابر a باشد. مثلث AEF از یک مثلث متساوی‌الاضلاع و دو مثلث متساوی‌الساقین مساوی با زاویه‌ی رأس ۱۵۰ تشکیل شده است.

$$\frac{S_{AEF}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}+۲\left(\frac{۱}{۲}a^{۲}\operatorname{Sin}۱۵۰\right)}{\frac{۱}{۲}a^{۲}\operatorname{Sin}۱۵۰}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}+\frac{۱}{۲}a^{۲}}{\frac{۱}{۴}a^{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+۲}{۱}=\sqrt{۳}+۲$$

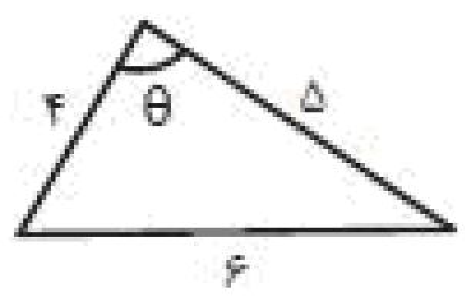
۷۷- مساحت مثلث با اضلاع ۴، ۵ و ۶ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۵\sqrt{۶۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶۳}}{۴}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۶۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۷\sqrt{۶۳}}{۴}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها یک زاویه‌ی مثلث را به‌دست می‌آوریم.

$$۶^{۲}=۵^{۲}+۴^{۲}-۲(۵)(۴)\operatorname{Cos}\theta$$

$$\Rightarrow ۳۶=۲۵+۱۶-۴۰\operatorname{Cos}\theta \Rightarrow -۵=-۴۰\operatorname{Cos}\theta$$



$$\operatorname{Sin}\theta=\sqrt{۱-\operatorname{Cos}^{۲}\theta}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۶۴}}=\frac{\sqrt{۶۳}}{۸}$$

$$S=\frac{۱}{۲}(۴)(۵)\frac{\sqrt{۶۳}}{۸}=\frac{۵\sqrt{۶۳}}{۴}$$

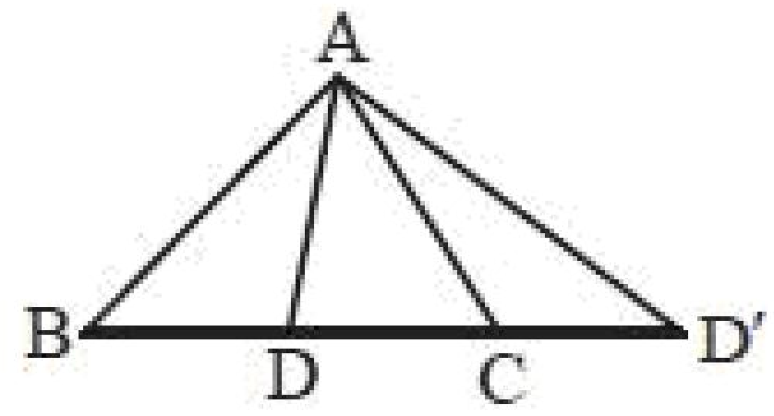
راه دوم: بنابر رابطه‌ی هرون می‌نویسیم:

$$P=\frac{۶+۵+۴}{۲}=\frac{۱۵}{۲}$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{\frac{۱۵}{۲}\left(\frac{۱۵}{۲}-۴\right)\left(\frac{۱۵}{۲}-۵\right)\left(\frac{۱۵}{۲}-۶\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{۱۵}{۲}\times\frac{۷}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}}=\frac{۵\sqrt{۶۳}}{۴}$$

۷۸- در مثلث ABC اگر $AB = ۳AC$ و $BC = ۱۲$ و نقاط D و D' به‌ترتیب پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A می‌باشند. عدد $AD^۲ + AD'^۲$ چند برابر ۹ می‌باشد؟



۱) ۹ ۲) ۳

۳) ۶ ۴) ۸

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.
در هر مثلث نیمساز داخلی و خارجی یک رأس بر هم عموداند پس مثلث ADD' قائم‌الزاویه اس. کافی است طول DD' را تعیین کنیم.

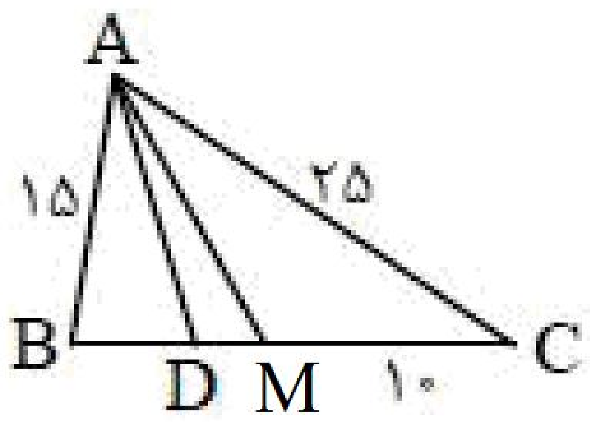
$$\text{نیمساز داخلی } AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳AC}{AC} = \frac{۳}{۱} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{۱۲}{DC} = \frac{۴}{۱} \Rightarrow DC = ۳$$

$$\text{نیمساز خارجی } AD' \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳AC}{AC} = \frac{۳}{۱} \xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}} \frac{۱۲}{D'C} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow D'C = ۶$$

پس: $DD' = ۹$، داریم:

$$A\overset{\triangle}{D}D' : AD^۲ + AD'^۲ = DD'^۲ = ۹^۲ = ۸۱$$

۷۹- اگر M وسط ضلع و D پای نیمساز وارد بر ضلع باشد، مساحت مثلث ADM کدام است؟



۱) ۱۸/۲۵ ۲) ۱۸/۷۵

۳) ۱۸/۵ ۴) ۱۸

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مثلث در رأس B قائم‌الزاویه است. (اعداد فیثاغورسی)

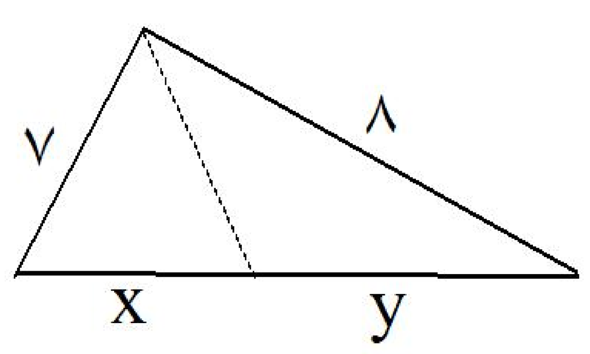
$$\frac{BD}{CD} = \frac{۱۵}{۲۵} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{BD}{۲۰} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow BD = ۷/۵ \Rightarrow DM = ۱۰ - ۷/۵ = ۲/۵$$

$$S_{ADM} = \frac{۱}{۲}AB.DM = \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times ۲/۵ = ۱۸/۷۵$$

۸۰- سه ضلع مثلثی ۸، ۷ و ۱۲ واحد است. طول قطعه بزرگ‌تر که نیمساز زاویه بزرگ‌تر روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱) ۶/۳ ۲) ۶/۴ ۳) ۷/۲ ۴) ۸/۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر قضیه نیمسازها داریم: $\frac{x}{y} = \frac{۷}{۸}$، خواهیم داشت:



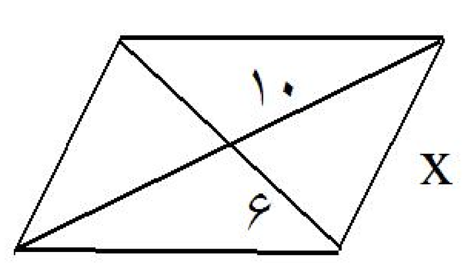
$$\frac{x+y}{y} = \frac{۷+۸}{۸} \Rightarrow \frac{۱۲}{y} = \frac{۱۵}{۸}$$

پس: $y = ۶/۴$

۸۱- در متوازی‌الاضلاع به قطرهای ۱۲ و ۲۰ واحد، زاویه بین دو قطر ۱۲۰ درجه است. ضلع کوچک‌تر کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۷}$ ۲) $۲\sqrt{۱۹}$ ۳) $۳\sqrt{۷}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

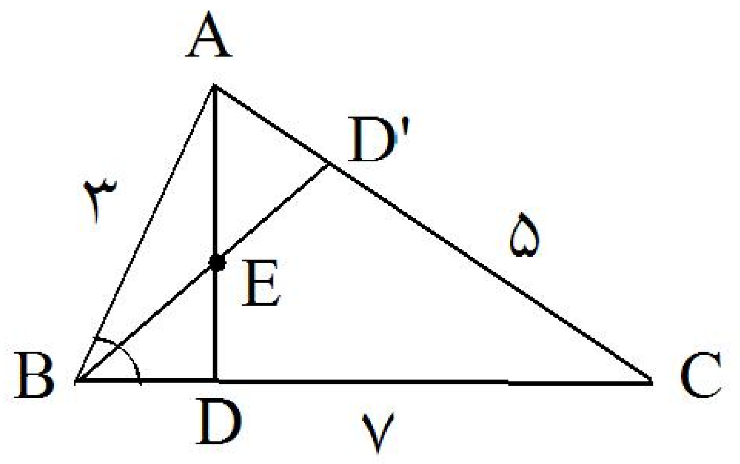
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف هم‌اند:



$$x^۲ = ۱۰۰ + ۳۶ - ۲(۶۰)\cos ۶۰^\circ = ۱۳۶ - ۶۰ = ۷۶ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۱۹}$$

۸۲- در مثلث ABC، $a = ۷$, $b = ۵$, $c = ۳$ است. اگر نیمساز AD و BD' یک‌دیگر را در نقطه E قطع کنند، مقدار $\frac{EA}{ED}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۷}$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در هر مثلث نیمساز هر زاویه ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند، برای نیمساز AD داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow BD = ۳x \ , \ DC = ۵x$$

به‌طور مشابه در مثلث ABD، BE نیمساز است پس داریم:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{EA}{ED} \Rightarrow \frac{۳}{۳x} = \frac{EA}{ED} \Rightarrow \frac{EA}{ED} = \frac{۱}{x}$$

از طرفی $BD + DC = ۷$ یعنی $۳x + ۵x = ۷$، در نتیجه: $\frac{EA}{ED} = \frac{۸}{۷}$.

۸۳- از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل به اضلاع $\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۲}$ یک چهارضلعی به دست می‌آید. محیط این چهارضلعی کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

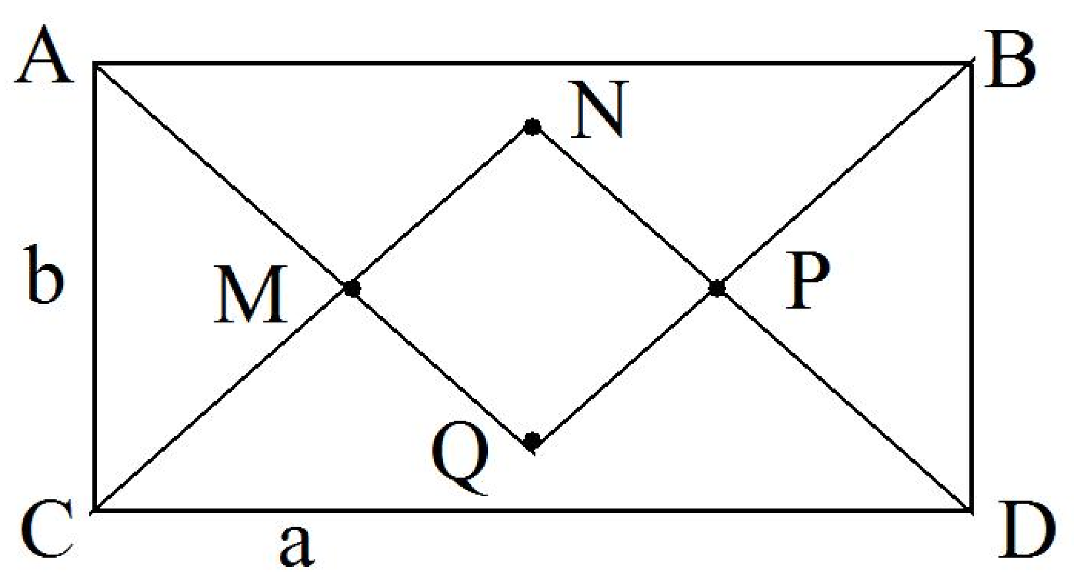
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چهارضلعی حاصل از برخورد نیم‌سازهای داخلی یک مستطیل، مربع است حال می‌خواهیم اندازه ضلع آن مربع را بیابیم.

در مثلث NDC : $DC^۲ = ND^۲ + NC^۲ \Rightarrow ۲ND^۲ \Rightarrow ۲ND^۲ = a^۲ \Rightarrow ND = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$

در مثلث MAD : $AD^۲ = MA^۲ + MD^۲ \Rightarrow ۲MD^۲ = b^۲ \Rightarrow MD = \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$

بنابراین $NM = ND - MD$ در نتیجه $MN = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a - b)$ (a و b طول و عرض مستطیل هستند) پس

$$MN = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۲\sqrt{۲} - \sqrt{۲}\right) = ۱ \Rightarrow \text{محیط} = ۴MN = ۴$$



۸۴- در مثلث ABC اگر $A = ۳۰^\circ$, $b = a\sqrt{۲}$ زاویه C چند درجه است؟

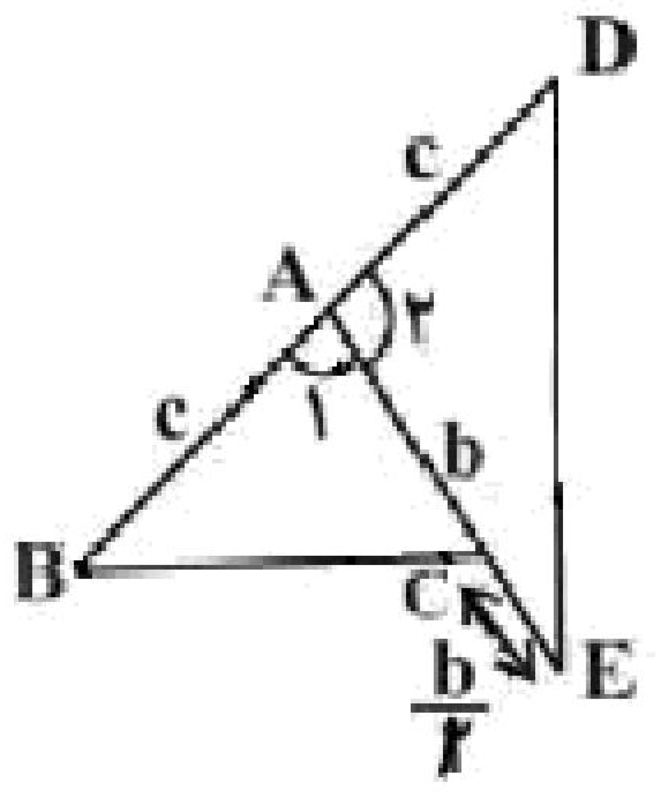
۱) ۱۵° ۲) ۱۰۵° ۳) ۱۵° یا ۱۰۵° ۴) ۷۵° یا ۱۰۵°

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر رابطه سینوس‌ها داریم $\frac{a}{\operatorname{Sin}A} = \frac{b}{\operatorname{Sin}B} \Rightarrow \frac{a}{\frac{۱}{۲}} = \frac{a\sqrt{۲}}{\operatorname{Sin}B} \Rightarrow \operatorname{Sin}B = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ پس

۱۳۵° یا $B = ۴۵^\circ$ چون $A + B + C = ۱۸۰^\circ$ الزاماً ۱۰۵° یا $C = ۱۵^\circ$ است.

۸۵- در مثلث ABC ، ضلع AB را از طرف A به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به D برسیم و ضلع AC را از طرف C به اندازه‌ی نصف خودش امتداد می‌دهیم تا به E برسیم. نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$



گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل $AB = AD = c$ و $AC = ۲CE = b$ است،
از طرفی چون زوایای $\hat{A}_۱$ و $\hat{A}_۲$ مکمل‌اند، در نتیجه $\operatorname{Sin}\hat{A}_۱ = \operatorname{Sin}\hat{A}_۲$ است، لذا داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}AD \times AE \times \operatorname{Sin}\hat{A}_۲}{\frac{۱}{۲}AB \times AC \times \operatorname{Sin}\hat{A}_۱} = \frac{c \times \frac{۳}{۲}b}{c \times b} = \frac{۳}{۲}$$

۸۶- در مثلث ABC مقدار $c \operatorname{Cos}B + b \operatorname{Cos}C$ همواره برابر کدام است؟

۱) a ۲) $\frac{۱}{۲}a$ ۳) $a \operatorname{Cos}A$ ۴) $a \operatorname{Sin}A$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC رابطه کسینوس‌ها را داریم:

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\operatorname{Cos}B$$
$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\operatorname{Cos}C$$

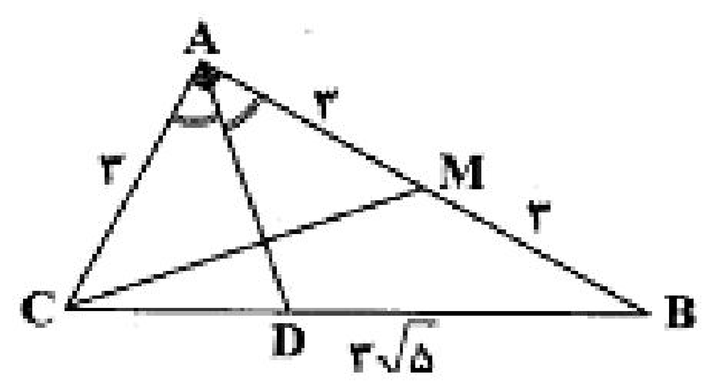
از جمع دو رابطه فوق خواهیم داشت: $۲a^۲ - ۲ac\operatorname{Cos}B - ۲ab\operatorname{Cos}C = ۰$ یا

$$c\operatorname{Cos}B + b\operatorname{Cos}C = a$$

۸۷- در مثلثی با اضلاع $AC=۳, AB=۶$ و $BC=۳\sqrt{۵}$، طول نیم‌ساز AD چند برابر طول میانه‌ی CM است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است چون اعداد داده شده فیثاغورسی‌اند، مثلث قائم‌الزاویه است، لذا قضیه‌ی فیثاغورس را در مثلث ACM می‌نویسیم:



$$CM=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

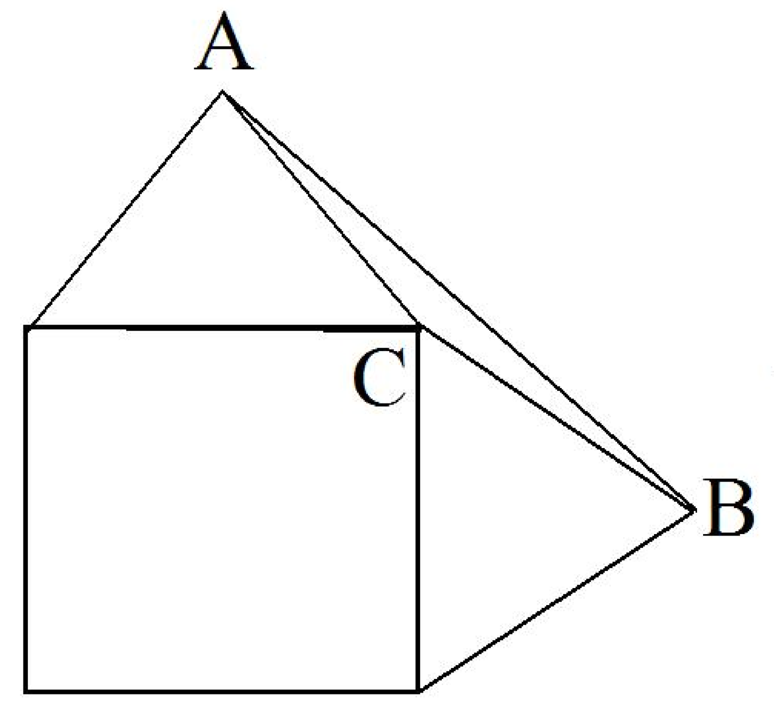
می‌دانیم نیم‌ساز ضلع مقابل را به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می‌کند.

$$\frac{DB}{DC}=\frac{۶}{۳}=۲ \Rightarrow \begin{cases} DB=۲k \\ DC=k \end{cases} \Rightarrow ۳k=۳\sqrt{۵} \Rightarrow k=\sqrt{۵} \Rightarrow \begin{cases} CD=\sqrt{۵} \\ BD=۲\sqrt{۵} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AD^۲=AB\times AC-BD\times CD=۳\times ۶-\sqrt{۵}\times ۲\sqrt{۵}=۸ \Rightarrow AD=۲\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{AD}{CM}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

۸۸- در بیرون مربعی به ضلع ۱ واحد، بر روی دو ضلع مجاور، دو مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است، فاصله‌ی دو رأس جدید کدام است؟

۱) $\sqrt{۴-\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{۳-\sqrt{۳}}$ ۳) $\sqrt{۱+\sqrt{۳}}$ ۴) $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$

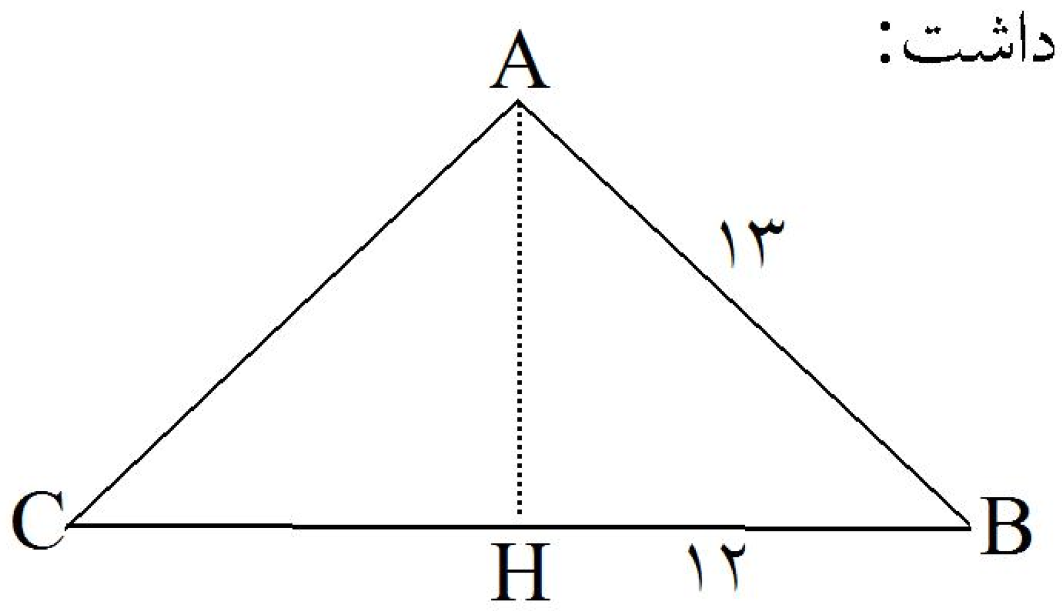


گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. مثلث CAB متساوی‌الساقین با ضلع $CA = CB = ۱$ و زاویه‌ی $A = B = ۳۰^\circ$ است.

$$AB^۲ = (۱)^۲ + (۱)^۲ - ۲(۱)(۱)\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۲ + \sqrt{۳} \Rightarrow AB = \sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

۸۹- در مثلثی به اضلاع ۲۴ ، ۱۳ و ۱۳ واحد، شعاع دایره محیطی آن کدام است؟

۱) ۱۲/۶۲ ۲) ۱۳/۲ ۳) ۱۵/۳ ۴) ۱۶/۹



گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین رسم شود خواهیم داشت:

$$AH = \sqrt{۱۳^۲ - ۱۲^۲} = ۵ \Rightarrow \operatorname{Sin} B = \frac{۵}{۱۳}$$

در هر مثلث داریم: $b = ۲R\operatorname{Sin} B \Rightarrow ۱۳ = ۲R\left(\frac{۵}{۱۳}\right) \Rightarrow R = ۱۶/۹$

۹۰- در مثلث ABC رابطه $\frac{b}{a}\operatorname{Cos} C + \frac{c}{a}\operatorname{Cos} B = ۱$ برقرار است. نوع این مثلث چگونه است؟

۱) فقط قائم‌الزاویه ۲) فقط متساوی‌الساقین

۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیرمشخص

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در هر مثلث داریم:

$$\begin{cases} b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\operatorname{Cos} B \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\operatorname{Cos} C \end{cases} \Rightarrow ۲a^۲ = ۲a\,(b\operatorname{Cos} C + c\operatorname{Cos} B)$$

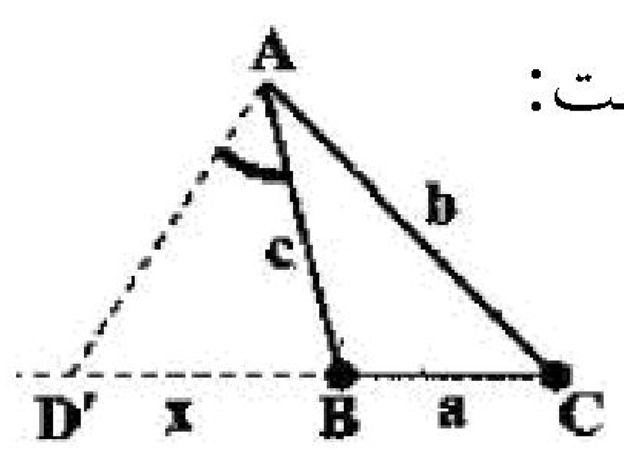
در نتیجه $\frac{b}{a}\operatorname{Cos} C + \frac{c}{a}\operatorname{Cos} B = ۱$ پس نوع مثلث غیر مشخص است.

۹۱- در مثلثی به اضلاع ۴، ۶ و ۸ ، نیمساز بزرگ‌ترین زاویه‌ی خارجی، کوچک‌ترین ضلع مثلث را قطع می‌کند. نسبت مساحت مثلثی که بیرون مثلث اصلی تشکیل می‌شود به مساحت مثلث اصلی کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. بزرگ‌ترین زاویه‌ی خارجی نظیر کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی است و کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی نظیر کوچک‌ترین ضلع است.

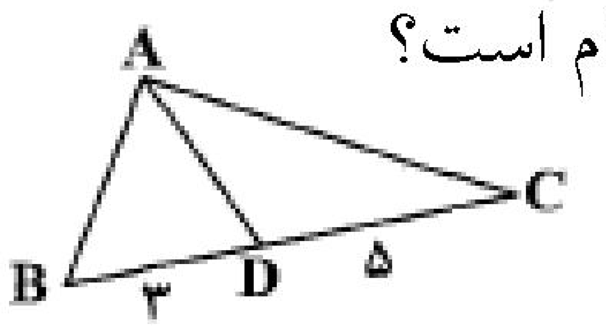
در مورد نیمساز خارجی داریم: $\frac{x}{x+a} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{c}{b-c}$



چون ارتفاع دو مثلث AD'B و ABC یکی است، لذا نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست:

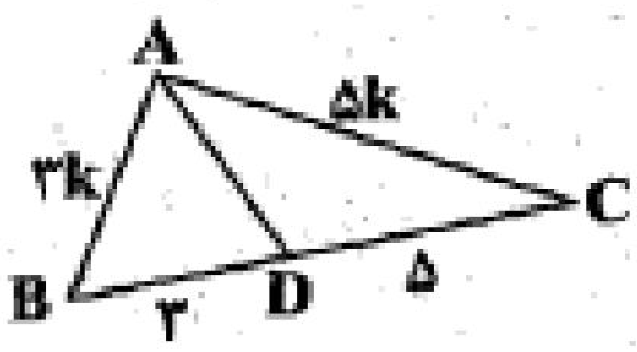
$$\frac{S_{ABD'}}{S_{ABC}} = \frac{x}{a} = \frac{c}{b-c} = \frac{۶}{۸-۶} = ۳$$

۹۲- در شکل داده شده، AD نیمساز زاویه‌ی A است. اگر محیط مثلث ۳۲ باشد، مقدار AD کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۱۵}$ ۲) $\sqrt{۱۵}$

۳) $\sqrt{۳۰}$ ۴) $۲\sqrt{۳۰}$



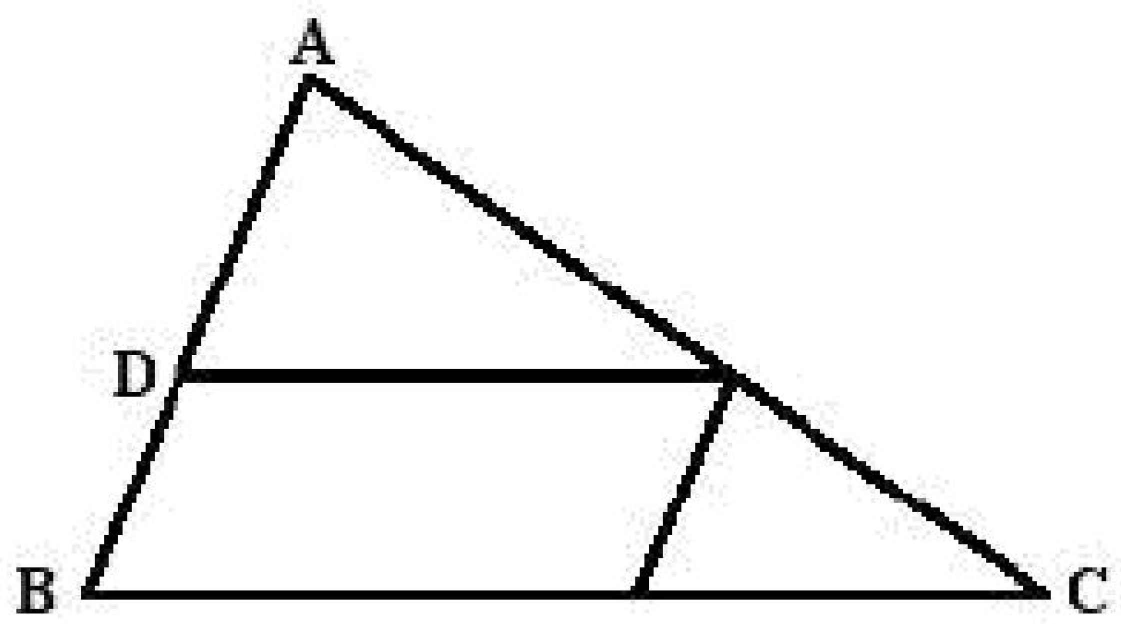
گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. نیمساز ضلع مقابل زاویه‌ی خود را به نسبت اضلاع زاویه تقسیم می‌کند. پس: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ بنابراین:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow AB = ۳k \;\;,\;\; AC = ۵k$$

$$ABC \text{ محیط} = ۳k + ۵k + ۸ = ۳۲ \Rightarrow k = ۳ \Rightarrow AB = ۹ \;\;,\;\; AC = ۱۵$$

$$AD^۲ = AB \,.\, AC - BD \,.\, DC \Rightarrow AD^۲ = ۹ \times ۱۵ - ۳ \times ۵ = ۱۵ \times ۸ \Rightarrow AD = ۲\sqrt{۳۰}$$

۹۳- در شکل روبه‌رو $\frac{DA}{DB} = \frac{۳}{۲}$، مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



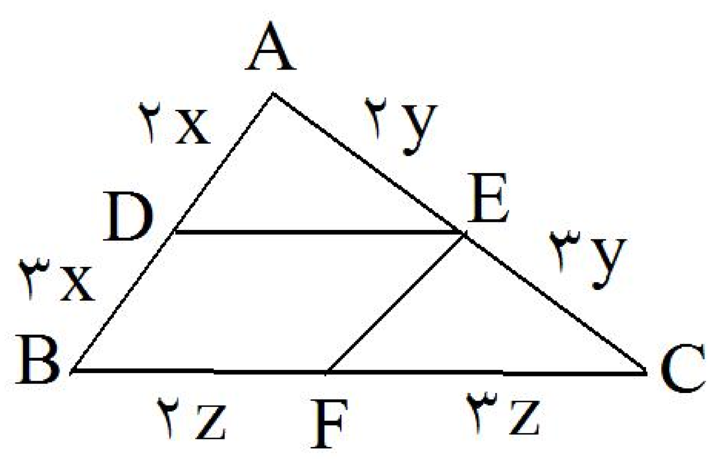
۱) ۳۶

۲) ۴۰

۳) ۴۵

۴) ۴۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض اگر DA را $۲x$ انتخاب کنیم آن‌گاه $DB = ۳x$ بنابر قضیه تالس نتیجه می‌گیریم:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AE = ۲y \;,\; EC = ۳y$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow \frac{۳y}{۲y} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow \frac{CF}{BF} = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow CF = ۳Z \;,\; BF = ۲Z$$

حالا مساحت متوازی‌الاضلاع و مساحت مثلث ABC را با کمک سینوس زاویه B به دست می‌آوریم.

$$\frac{S_{BDEF}}{S_{ABC}} = \frac{BD \times BF \operatorname{Sin} B}{\frac{۱}{۲} BA \times BC \operatorname{Sin} B} = \frac{(۳x)(۲z)}{\frac{۱}{۲}(۵x)(۵z)} = \frac{۱۲}{۲۵} \times ۱۰۰ = ۴۸\%$$

۹۴- مثلث ABC در رأس A قائمه است. اگر طول وتر a و طول اضلاع زاویه‌ی قائمه برابر b و محیط مثلث ۳۶ واحد باشد، مساحت آن همواره کدام است؟$(a \neq b \neq c)$

۱) $(۱۸ - b)(۱۸ - a)$ ۲) $(۱۸ - c)(۱۸ - b)$ ۳) $(۳۶ - a)(۳۶ - c)$ ۴) $(۳۶ - a)(۳۶ - b)$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$s = \frac{b.c}{۲} = \frac{۲bc}{۴} = \frac{b^۲ + c^۲ + ۲bc - b^۲ - c^۲}{۴} = \frac{-(b - c)^۲ + a^۲}{۴} = \frac{a - (b - c)}{۲} \times \frac{a + (b - c)}{۲}$$

$$= \left(\frac{a - b + c}{۲}\right)\left(\frac{a + b - c}{۲}\right) = \left(\frac{a - b + c - ۲b}{۲}\right)\left(\frac{a + b - c - ۲c}{۲}\right)$$

$$= \left(\frac{۳۶ - ۲b}{۲}\right)\left(\frac{۳۶ - ۲c}{۲}\right) = (۱۸ - b)(۱۸ - c)$$

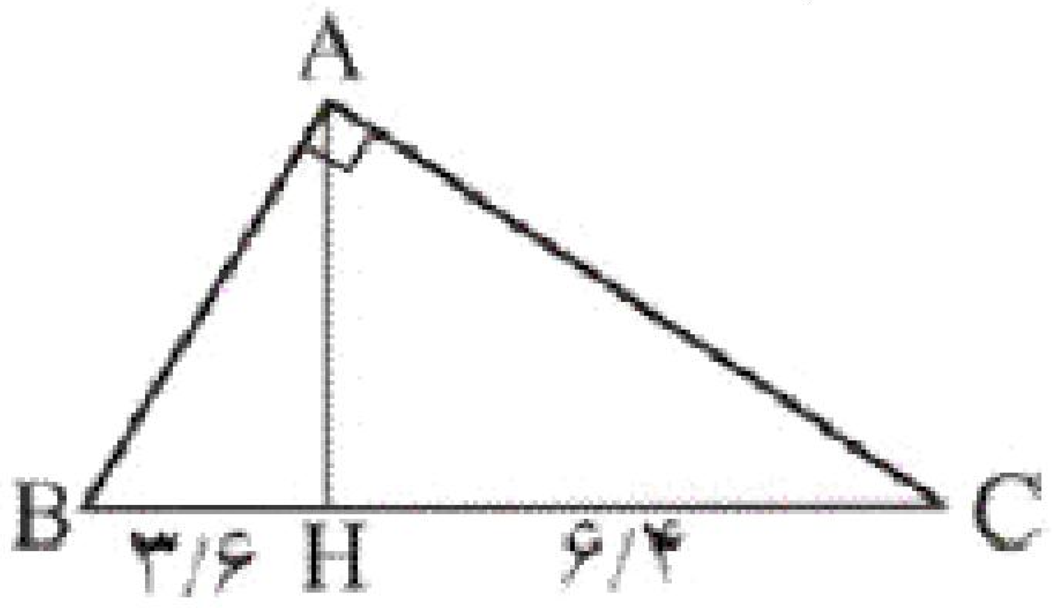
۹۵- در مثلث قائم الزاویه‌ای اندازه‌ی دو پاره خطی که ارتفاع وارد بر وتر، بر روی وتر جدا می‌کند به ترتیب ۶/۴ و ۶/۳ است. مجموع دو ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اولاً: $BC = BH + HC = ۳.۶ + ۶.۴ = ۱۰$

ثانیاً: بنا بر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$\begin{cases} AB^{۲} = BH \times BC = ۳.۶ \times ۱۰ = ۳۶ \Rightarrow AB = ۶ \\ AC^{۲} = CH \times BC = ۶.۴ \times ۱۰ = ۶۴ \Rightarrow AC = ۸ \end{cases}$$
$$\Rightarrow AB + AC = ۶ + ۸ = ۱۴$$

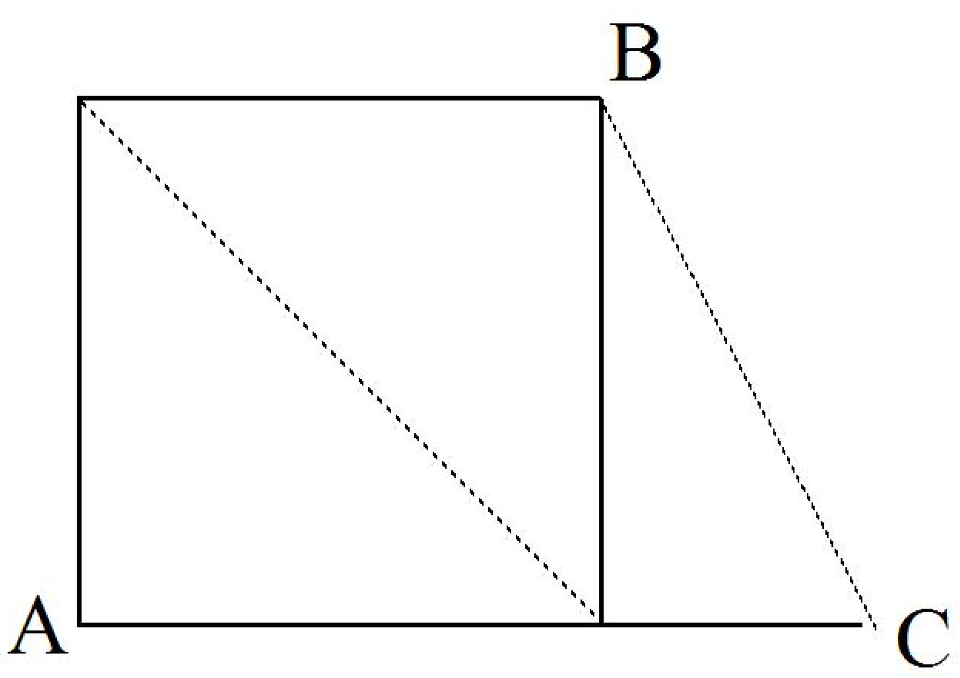
۹۶- در مثلث ABC اگر $A = ۳۰^\circ\ ,\ b = a\sqrt{۲}$ باشد زاویه C چند درجه است؟

۱) فقط ۱۵ ۲) فقط ۱۰۵ ۳) ۷۵ یا ۱۰۵ ۴) ۱۵ یا ۱۰۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در سینوس‌ها در هر مثلث داریم:
$$\frac{Sin A}{a} = \frac{Sin B}{b} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}}{a} = \frac{Sin B}{a\sqrt{۲}}$$

در نتیجه $Sin B = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ پس زاویه ۱۳۵° یا $\hat{B} = ۴۵^\circ$ می‌دانیم مجموع زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰ درجه است پس ۱۵° یا $C = ۱۰۵^\circ$

۹۷- در شکل مقابل چهارضلعی مربع است و AC برابر قطر مربع است مقدار $tg\ ۲۲/۵$ کدام است؟



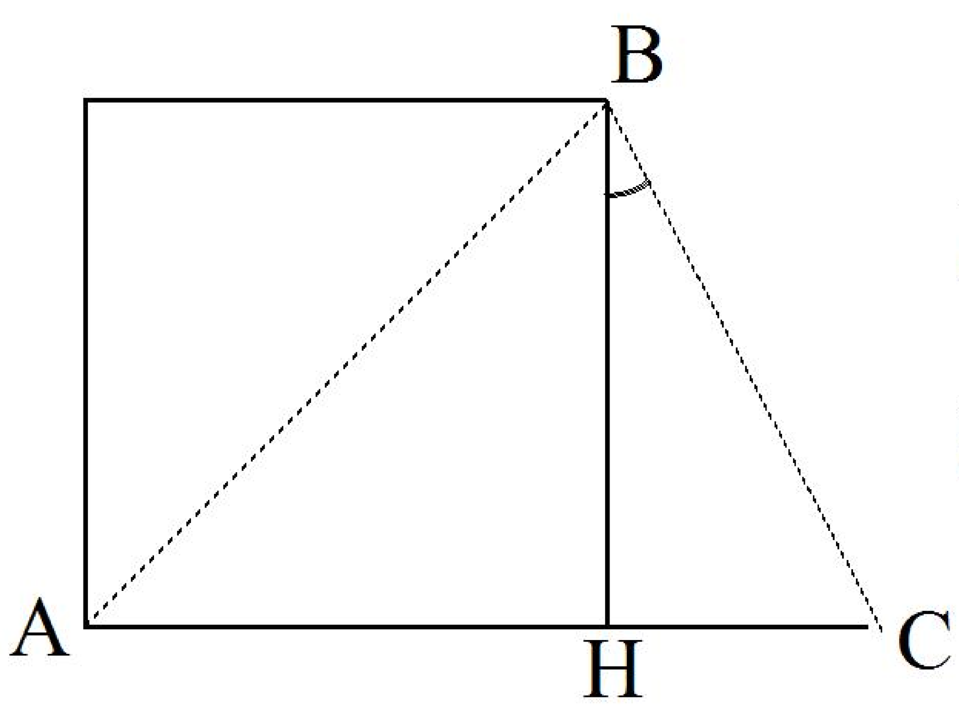
۱) $\sqrt{۲} - ۱$

۲) $۲ - \sqrt{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}\left(۲ - \sqrt{۲}\right)$

۴) $\frac{۱}{۲}\left(۱ + \sqrt{۲}\right)$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر ضلع مربع a قطر مربع $AB = a\sqrt{۲}$ است. در مثلث ABC داریم:



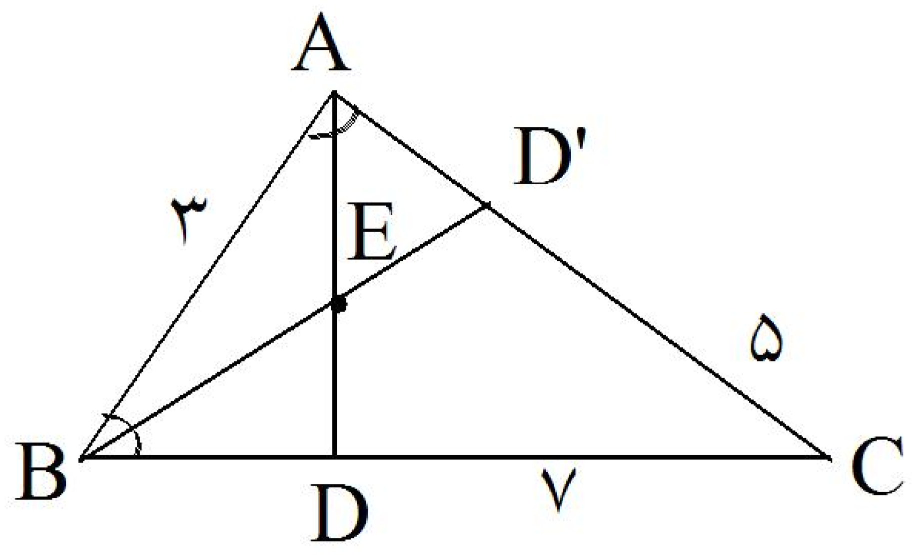
$$\hat{A} = ۴۵^\circ\ ,\ AC = AB = a\sqrt{۲}\ ,\ CH = a\sqrt{۲} - A = \left(\sqrt{۲} - ۱\right)a$$
$$\hat{C} = \hat{B} = \frac{۱۸۰ - ۴۵}{۲} = ۶۷/۵ \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۲۲/۵$$

می‌دانیم $tg B_۱ = \frac{CH}{BH} = \frac{a\left(\sqrt{۲} - ۱\right)}{a}$ پس $tg\ ۲۲/۵ = \sqrt{۲} - ۱$

۹۸- در مثلث ABC ، $a = ۷$، $b = ۵$ و $c = ۳$ است. اگر نیم‌ساز AD و BD' یک‌دیگر را در نقطه E قطع کنند، مقدار $\frac{EA}{ED}$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



در هر مثلث نیم‌ساز هر زاویه ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند برای نیم‌ساز AD داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow BD = ۳x\ ,\ DC = ۵x$$

به طور مشابه در مثلث ABD ، BE نیم‌ساز است پس داریم:

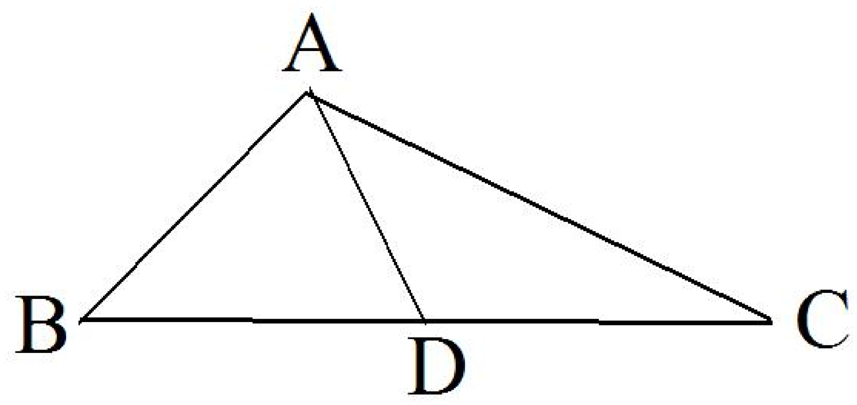
$$\frac{AB}{BD} = \frac{EA}{ED} \Rightarrow \frac{۳}{۳x} = \frac{EA}{ED} \Rightarrow \frac{EA}{ED} = \frac{۱}{x}$$

از طرفی $BD + DC = ۷$ یعنی $۳x + ۵x = ۷$ و $x = \frac{۷}{۸}$ در نتیجه $\frac{EA}{ED} = \frac{۸}{۷}$

۹۹- در مثلث ABC داریم $۶AB = ۴AC = ۳BC$ است. نقطه D پای نیم‌ساز داخلی زاویه A است. BD چند برابر AB است؟

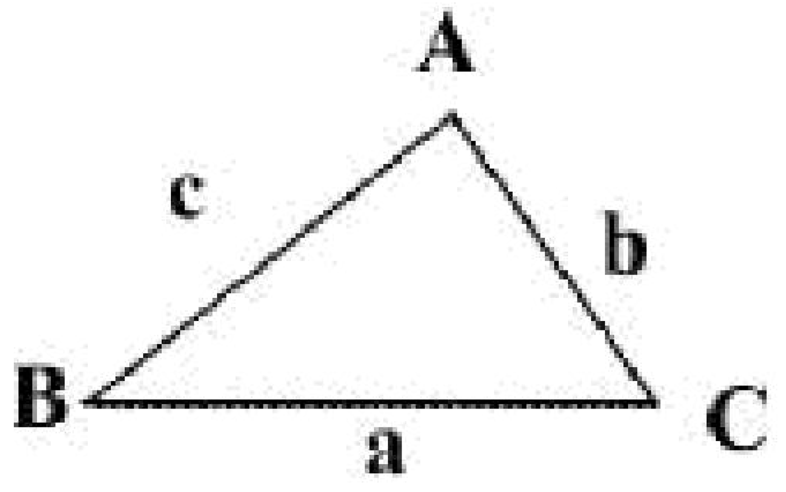
۱) ۰/۶ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر خاصیت نیم‌ساز مثلث داریم $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۲}{۳}$



پس $\frac{DB}{BC} = \frac{۲}{۵}$ یا $DB = \frac{۲}{۵}BC$ در نتیجه $DB = \frac{۴}{۵}AB$ یا $DB = ۰/۸AB$ یعنی DB به اندازه ۰/۸ ضلع AB است.

۱۰۰- در مثلث ABC، اگر $\frac{\hat{A}}{۵} = \frac{\hat{B}}{۳} = ۱۵^\circ$ و $b = ۴۸$ باشد، مقدار c کدام است؟



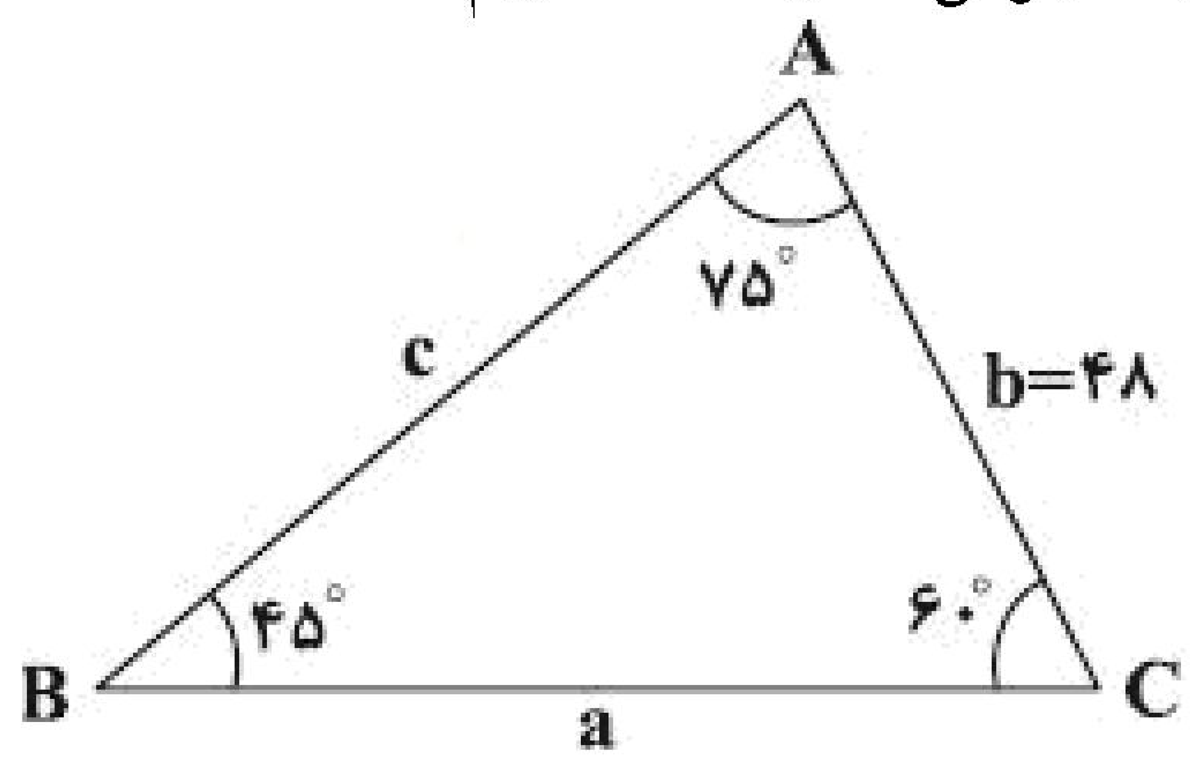
۱) $۴۸\sqrt{۶}$
۲) $۲۴\sqrt{۶}$
۳) ۲۴
۴) $۲۲\sqrt{۶}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا زوایای داخلی مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\hat{A}}{۵} = \frac{\hat{B}}{۳} = ۱۵^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = ۷۵^\circ \\ \hat{B} = ۴۵^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = ۱۸۰^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \Rightarrow \hat{C} = ۱۸۰^\circ - (۷۵^\circ + ۴۵^\circ) = ۶۰^\circ$$

طبق قانون سینوس‌ها در مثلث داریم:



$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{c}} \Rightarrow \frac{۴۸}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow c = ۲۴\sqrt{۶}$$