معادله‌ی درجه‌ی دوم

پیش از این روش حل کردن معادله‌های درجه‌ی اول را آموخته‌اید:

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و $a \neq 0$، **جواب** معادله‌ی $ax+b=0$ برابر است با $x=-\frac{b}{a}$. معادله‌ی درجه‌ی اول همواره جواب دارد. به جواب این معادله، **ریشه** هم می‌گویند. در این درس با روش‌های حل کردن معادله‌های درجه‌ی دوم آشنا می‌شوید.

تعریف **معادله‌ی درجه‌ی دوم، معادله‌ای به شکل**

$$ax^2+bx+c=0$$

است که در آن a، b و c عددهایی حقیقی‌اند و $a \neq 0$.

مثال: معادله‌های زیر همگی معادله‌ای درجه‌ی دوم هستند.

الف) $x^2=0$ ب) $x^2-1=0$ پ) $x^2+1=0$ ت) $2x-x^2+1=0$

مثال: معادله‌ی $x^2-3x=2x+1$، معادله‌ای درجه دوم است، زیرا اگر جمله‌های سمت راست را به سمت چپ منتقل کنیم و جمله‌ها را ساده کنیم، می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$x^2-3x-2x-1=0$$

$$x^2-5x-1=0$$

روش‌های حل کردن معادله‌های درجه‌ی دوم

الف) معادله‌های به شکل $ax^2+c=0$

برای حل کردن معادله‌ی $ax^2+c=0$ از روش ریشه‌گیری استفاده می‌کنیم:

$$ax^2+c=0$$

$$ax^2=-c$$

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

بنابراین، اگر $c=0$، آن‌گاه $x=0$ و در غیر این صورت

$$x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

معلوم است که در این حالت باید $-\frac{c}{a}\geq 0$ و اگر $-\frac{c}{a}<0$، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

اگر $b^۲-۴ac=۰$، آن‌گاه

$$(x+\frac{b}{۲a})^۲=۰$$

یعنی $x_۱=-\frac{b}{۲a}$. بنابراین در این حالت معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ فقط یک جواب دارد که به آن **ریشه‌ی مضاعف** یا **ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی دوم** می‌گویند.

اگر $b^۲-۴ac<۰$، معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

معمولاً $b^۲-۴ac$ را با Δ نشان می‌دهند. به این ترتیب، می‌توانیم بحث قبل را در جدول زیر خلاصه کنیم.

وضعیت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$	$\Delta=b^۲-۴ac$
معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد: $x_۱,x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$	$\Delta>۰$
معادله یک ریشه‌ی حقیقی مضاعف دارد: $x_۱=-\frac{b}{۲a}$	$\Delta=۰$
معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.	$\Delta<۰$

مثال: معادله‌ی $۳x^۲-۵x-۲=۰$ را در نظر بگیرید. در این‌جا، $a=۳$، $b=-۵$ و $c=-۲$. بنابراین

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۵)^۲-۴\times۳\times(-۲)=۲۵+۲۴=۴۹$$

در نتیجه طبق فرمول کلی،

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۵\pm\sqrt{۴۹}}{۲\times۳}=\frac{۵\pm۷}{۶}$$

بنابراین ریشه‌ها عبارت‌اند از

$$x_۱=\frac{۵-۷}{۶}=-\frac{۱}{۳},\quad x_۲=\frac{۵+۷}{۶}=۲$$

مثال: معادله‌ی $۹x^۲-۱۲x+۴=۰$ را در نظر بگیرید. در این‌جا، $a=۹$، $b=-۱۲$ و $c=۴$. بنابراین

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱۲)^۲-۴\times۹\times۴=۱۴۴-۱۴۴=۰$$

در نتیجه، ریشه‌ی معادله برابر است با $x_۱=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}$.

مثال: معادله‌ی $\sqrt{۳}x^۲=۵x+\sqrt{۱۲}$ را در نظر بگیرید. اگر جمله‌های سمت راست این معادله را به سمت چپ بیاوریم، می‌توانیم آن را به شکل $\sqrt{۳}x^۲-۵x-\sqrt{۱۲}=۰$ بنویسیم. در این‌جا $a=\sqrt{۳}$، $b=-۵$ و $c=-\sqrt{۱۲}$. بنابراین

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۵)^۲-۴\times\sqrt{۳}\times(-\sqrt{۱۲})=۲۵+۲۴=۴۹$$

در نتیجه، طبق فرمول کلی،

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۵\pm\sqrt{۴۹}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۵\pm۷}{۲\sqrt{۳}}$$

بنابراین، ریشه‌ها عبارت‌اند از

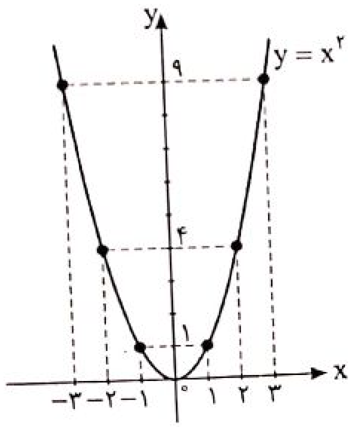
$$x_۱=\frac{۵-۷}{۲\sqrt{۳}}=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\quad x_۲=\frac{۵+۷}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۳}=۲\sqrt{۳}$$

درس دوم: سهمی

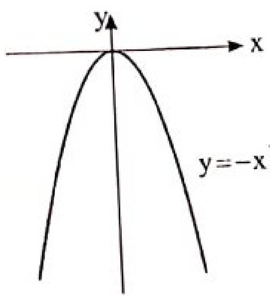
برای رسم نمودار $y=x^۲$ از روش **نقطه‌یابی** استفاده می‌کنیم. در این روش مقدارهایی مختلف از x را در معادله قرار می‌دهیم و مقدارهای متناظر y را پیدا می‌کنیم. این مقدارهای x و y نقطه‌هایی مانند (x, y) از نمودار را مشخص می‌کنند که به کمک آن‌ها می‌توانیم نمودار را رسم کنیم. به جدول زیر توجه کنید.

x	$y=x^۲$	(x, y)
۰	$y=۰^۲=۰$	$(۰, ۰)$
۱	$y=۱^۲=۱$	$(۱, ۱)$
−۱	$y=(-۱)^۲=۱$	$(-۱, ۱)$
۲	$y=۲^۲=۴$	$(۲, ۴)$
−۲	$y=(-۲)^۲=۴$	$(-۲, ۴)$
۳	$y=۳^۲=۹$	$(۳, ۹)$
−۳	$y=(-۳)^۲=۹$	$(-۳, ۹)$

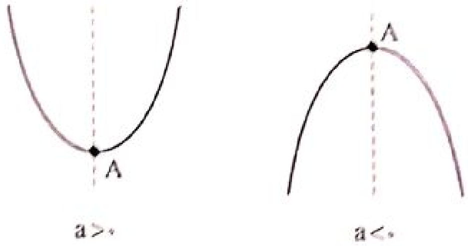
به کمک این نقطه‌ها می‌توانیم نمودار $y=x^۲$ را مانند شکل زیر رسم کنیم. توجه کنید که پایین‌ترین نقطه روی این نمودار نقطه‌ی $(۰, ۰)$ است. همچنین، محور y، یعنی خط $x=۰$، خط تقارن آن است.



به همین ترتیب می‌توانیم نمودار $y=-x^۲$ را مانند شکل زیر رسم کنیم. توجه کنید که بالاترین نقطه روی این نمودار نقطه‌ی $(۰, ۰)$ است و محور y، یعنی خط $x=۰$، خط تقارن آن است.



به نمودار $y=ax^2+bx+c$ که در آن a ، b و c عددهایی حقیقی‌اند و $a\neq 0$، **سهمی** می‌گویند. سهمی برحسب علامت a به یکی از شکل‌های زیر است.



اگر $a>0$، A پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی است و اگر $a<0$، A بالاترین نقطه‌ی سهمی است. در هر دو نمودار A را **رأس سهمی** می‌نامند. همچنین، خط‌چینی که از رأس سهمی گذشته و موازی محور y است، **خط تقارن** سهمی است.

به روش مربع کامل کردن می‌توانیم معادله‌ی سهمی را به گونه‌ای بنویسیم که پیدا کردن رأس و خط تقارن آن ساده باشد. معادله‌ی سهمی $y=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید $(a\neq 0)$. در این صورت

$$\begin{aligned}
y&=ax^2+bx+c\\
&=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c\\
&=a(x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2)+c\\
&=a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2})+c\\
&=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c\\
&=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\\
&=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}\\
&=a(x-h)^2+k \qquad (h=-\frac{b}{2a},\quad k=-\frac{\Delta}{4a})
\end{aligned}$$

نتیجه معادله‌ی هر سهمی را می‌توان به شکل $y=a(x-h)^2+k$ نوشت که در این‌جا $a\neq 0$.

اکنون فرض کنید $a>0$. در این صورت

$$y=a(x-h)^2+k\geq k$$

یعنی همه‌ی مقدارهای y از k بزرگ‌تر یا با آن برابرند و وقتی $y=k$ که $x=h$.

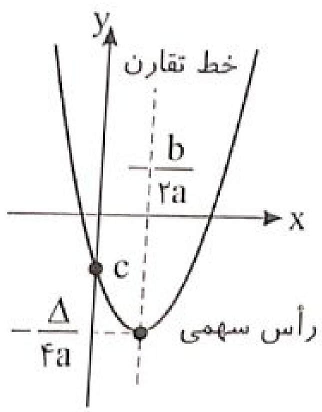
بنابراین نقطه‌ی (h,k) رأس سهمی است. همچنین خطی که از رأس سهمی می‌گذرد و موازی محور y است، خط $x=h$ است. اگر $a<0$، باز هم همین نتیجه‌ها درست است.

نتیجه رأس سهمی به معادله‌ی $y=a(x-h)^2+k$، نقطه‌ی (h,k) است و خط $x=h$، خط تقارن این سهمی است.

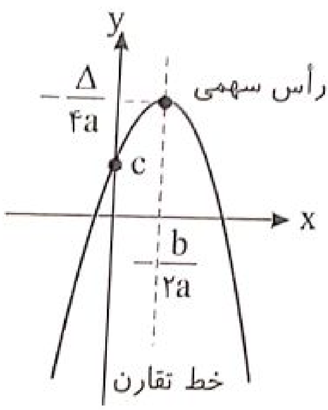
اگر توجه کنیم که

$$h=-\frac{b}{2a},\quad k=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

رأس سهمی $y=ax^{2}+bx+c$ نقطه‌ی $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^{2}}{4a}\right)$ است و خط $x=-\frac{b}{2a}$، خط تقارن این سهمی است.



$a>0$



$a<0$

برای تعیین علامت عبارت‌هایی که از ضرب و تقسیم چند عبارت تشکیل شده‌اند، ابتدا هر یک از آن‌ها را تعیین علامت می‌کنیم و در آخر علامت عبارت مورد نظر را تعیین می‌کنیم.

علامت حاصل‌ضرب دو عبارت جبری هم علامت، مثبت است و علامت حاصل‌ضرب دو عبارت جبری مختلف‌العلامت، منفی است. در مورد تقسیم دو عبارت جبری هم این مطلب درست است. همچنین، اگر حداقل یکی از دو عبارت برابر صفر گردد، حاصل‌ضرب آن‌ها صفر است و در تقسیم عبارت‌ها، اگر مخرج صفر باشد، عبارت تعریف نشده می‌شود.

مثال: می‌خواهیم عبارت $y=(x-۳)(۱-۲x)$ را تعیین علامت کنیم. توجه کنید که ریشه‌های $x-۳$ و $۱-۲x$ به ترتیب ۳ و $\frac{۱}{۲}$ هستند. بنابراین جدول تعیین علامت عبارت مورد نظر به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۳		$+\infty$
$x-۳$		$-$		$-$	۰	$+$	
$۱-۲x$		$+$	۰	$-$		$-$	
$(x-۳)(۱-۲x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

مثال: می‌خواهیم عبارت $y=\frac{x+۱}{۳-۲x}$ را تعیین علامت کنیم. توجه کنید که ریشه‌های $x+۱$ و $۳-۲x$ به ترتیب -۱ و $\frac{۳}{۲}$ هستند. بنابراین جدول تعیین علامت عبارت مورد نظر به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۱		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
$x+۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$۳-۲x$		$+$		$+$	۰	$-$	
$\frac{x+۱}{۳-۲x}$		$-$	۰	$+$	ت.ن	$-$	

مثال: می‌خواهیم عبارت $y=(x-۲)^۳(x-۴)^۴$ را تعیین علامت کنیم. ریشه‌های $x-۲$ و $x-۴$ به ترتیب ۲ و ۴ هستند. توجه کنید که $x-۲$ و $(x-۲)^۳$ به ازای $x=۲$ هر دو صفرند و در بقیه‌ی نقطه‌ها، علامت آن‌ها یکسان است. همین‌طور $(x-۴)^۴$ به ازای $x=۴$ صفر است و در بقیه‌ی نقطه‌ها علامت آن مثبت است. بنابراین جدول تعیین علامت عبارت مورد نظر به شکل زیر است:

x	$-\infty$		۲		۴		$+\infty$
$(x-۲)^۳$		$-$	۰	$+$		$+$	
$(x-۴)^۴$		$+$		$+$	۰	$+$	
$(x-۲)^۳(x-۴)^۴$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	

توجه کنید که می‌توانستیم عبارت $(x-۴)^۴$ را در جدول ننویسیم، زیرا علامت آن برای هر $x\neq ۴$ مثبت است و تأثیری در علامت کل عبارت ندارد. فقط لازم است که $x=۴$ در جدول باشد، زیرا به ازای $x=۴$ مقدار y برابر صفر است.

در درس اول دیدیم که چندجمله‌ای درجه‌ی دوم ax^2+bx+c را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

که در این‌جا $\Delta=b^2-4ac$. اکنون، برحسب این که تعداد ریشه‌های این چندجمله‌ای چندتاست می‌توانیم عبارت $y=ax^2+bx+c$ را تعیین علامت کنیم.

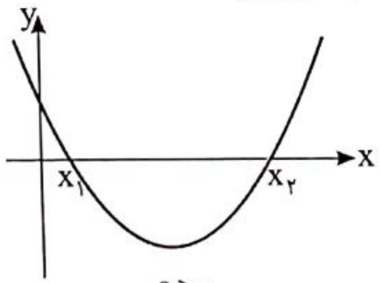
حالت اول $\Delta>0$. در این حالت معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه‌ی متمایز دارد. این دو ریشه را x_1 و x_2 بنامید و فرض کنید $x_1<x_2$. در این صورت

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

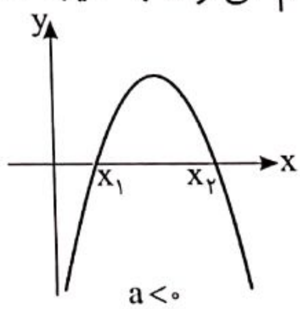
بنابراین جدول تعیین علامت ax^2+bx+c به شکل زیر است:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

از روی شکل‌های زیر هم می‌توان به نتیجه‌های این جدول پی برد.



$a>0$



$a<0$

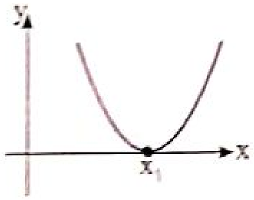
حالت دوم $\Delta=0$. در این صورت معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد. این ریشه را x_1 بنامید. در این صورت

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$$

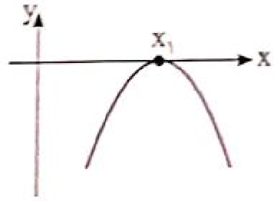
بنابراین جدول تعیین علامت ax^2+bx+c به شکل زیر است:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$(x-x_1)^2$		$+$	0	$+$	
$a(x-x_1)^2$		موافق علامت a	0	موافق علامت a	

از روی شکل های زیر هم می‌توان به نتیجه‌های این جدول پی برد.



$a>0$



$a<0$

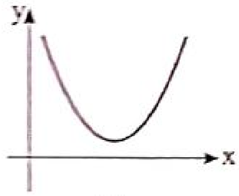
حالت سوم $\Delta<0$. در این صورت معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد و چون

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

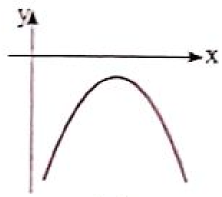
و علامت $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$ در سمت راست مثبت است، پس علامت ax^2+bx+c به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	

از روی شکل‌های زیر هم می‌توان به نتیجه‌ی این جدول پی برد.



$a>0$



$a<0$

مثال: می‌خواهیم عبارت $y=-4x^2+8x-3$ را تعیین علامت کنیم. توجه کنید که در این‌جا

$$\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times(-4)\times(-3)=16$$

پس معادله‌ی $-4x^2+8x-3=0$ دو ریشه‌ی متمایز دارد:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8-\sqrt{16}}{2\times(-4)}=\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8+\sqrt{16}}{2\times(-4)}=\frac{1}{2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت مورد نظر به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-4x^2+8x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

از روی شکل زیر هم می‌توان به نتیجه‌ی این جدول پی برد.