

## مجموعه

## الف) مفهوم مجموعه، تساوی مجموعه، عضویت

✓ مجموعه: هر چند مجموعه یکی از مفاهیم تعریف نشده ریاضی است اما بصورت شهودی می‌توان گفت: «هر دسته‌ی مشخص شده از اشیاء را یک مجموعه می‌نامند و آن اشیاء را اعضای آن مجموعه گویند.»

• مثال ۱: کدامیک از موارد زیر، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

- الف) انسان‌های باهوش (ب) حیوانات قوی (ج) اعداد بسیار بزرگ  
 د) اعداد طبیعی بزرگتر از  $10^6$  (ه) دانش آموزان مدرسه شما

✓ حل:

الف) و (ب) و (ج) مجموعه را مشخص نمی‌کنند زیرا صفات باهوش، قوی، بسیار بزرگ مشخص شده نیستند و دو فرد متمایز نظرهای متفاوتی درباره‌ی آنها دارند.

د) و (ه) مجموعه را مشخص می‌کنند اعداد طبیعی بزرگتر از  $10^6$  برای همه کسانی که با اعداد طبیعی‌اشنایی دارند مشخص است، همچنین دانش آموزان مدرسه دقیقاً مشخص شده‌اند.

✓ تعلق (عضویت): هرگاه عضوی در مجموعه‌ای باشد می‌گوئیم آن عضو به مجموعه تعلق دارد و از نماد  $\in$  (تعلق) استفاده می‌کنیم.

• مثال ۲: اگر  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}', \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$  به ترتیب مجموعه اعداد طبیعی، صحیح، گویا، گنگ و حقیقی باشند، از جملات زیر کدام‌ها درست و کدام‌ها نادرست هستند؟

- الف)  $-2 \in \mathbb{N}$  (ب)  $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$  (ج)  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  (د)  $(1 + \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$   
 هـ)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q}'$  (و)  $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$  (ز)  $1 \in \mathbb{R}$

✓ حل:

- الف) نادرست (ب) درست (ج) نادرست (د) نادرست  
 هـ) درست (و) نادرست (ز) درست

✓ تساوی دو مجموعه: مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را مساوی گویند هرگاه تمامی اعضای مجموعه‌ی  $A$  در مجموعه‌ی  $B$  و تمامی اعضای  $B$  در مجموعه‌ی  $A$  وجود داشته باشند. به عبارت خلاصه‌تر می‌توان گفت دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  وقتی مساویند که اعضایشان یکی باشد در اینصورت می‌نویسیم  $A = B$

• مثال ۳: درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف)  $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$

ب)  $\{1, 1, 1, 2, 2, 2\} = \{1, 2\}$

ج)  $\{1, 7, 9\} = \left\{\frac{5}{5}, \sqrt{49}, 3^2\right\}$

✍ حل: همه درست هستند زیرا با کمی دقت می‌بینیم در شرایط تعریف تساوی دو مجموعه صدق می‌کند یعنی هر عضو از مجموعه‌ی اول عضوی از مجموعه‌ی دوم است و برعکس.

📖 توجه ۱: مثال فوق تصریح می‌کند که:

- ترتیب نوشته شدن عناصر در مجموعه‌ها نقش ندارند.

- تکرار شدن یک عضو در مجموعه بلامانع است.

- تغییر شکل ظاهری اعضای مجموعه باعث به وجود آمدن مجموعه‌ی جدید نمی‌شود.

• مثال ۴: از تساوی  $\{x + 2, 5\} = \{3, y - 1\}$  مقادیر  $x, y$  را پیدا کنید.

✍ حل: با توجه به تعریف تساوی دو مجموعه، عدد ۵ که در مجموعه‌ی سمت چپ است باید در مجموعه‌ی سمت راست نیز باشد پس  $5 = y - 1$  و از آنجا  $y = 6$ ، همچنین عدد ۳ که در مجموعه‌ی سمت راست است باید در مجموعه‌ی سمت چپ نیز باشد پس  $3 = x + 2$  و در نتیجه  $x = 1$ .

### ب) زیر مجموعه

✓ زیر مجموعه: اگر هر عضو مجموعه‌ی  $A$ ، عضوی از مجموعه‌ی  $B$  می‌نامند و به صورت  $A \subset B$  نشان می‌دهند.

• مثال ۵: با توجه به مثال قبل کدامیک از عبارات زیر درست و کدامیک نادرستند؟

الف)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$       ب)  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$       ج)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}'$

د)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$       ه)  $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$       و)  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}'$

✍ حل: گزینه‌های (الف)، (د)، (ه) درست و بقیه نادرستند.

تعریف ۲:

□ مجموعه‌ی تهی مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد و با  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نشان داد می‌شود.

□ تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه است.

□ هر مجموعه زیر مجموعه‌ی خودش می‌باشد.

### ج) اعمال روی مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک، تفاضل)

#### اعمال بر مجموعه‌ها:

در این کتاب، روی مجموعه سه عمل اجتماع، اشتراک و تفاضل تعریف می‌شود.

✓ اجتماع دو مجموعه‌ها: مجموعه عناصری است که حداقل به یکی از دو مجموعه تعلق داشته باشد. اجتماع دو

مجموعه  $A$ ،  $B$  را با  $A \cup B$  نشان می‌دهیم و نمودار متناظر آن به صورت زیر است:

• مثال ۶: اگر  $A = \{1, 2, 3\}$ ،  $B = \{2, 3, 5\}$ ، آنگاه  $A \cup B$  را به دست آورید:

✍ حل:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

✓ اشتراک دو مجموعه‌ها: مجموعه‌ی عناصری که به هر دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  تعلق داشته باشند اشتراک دو

مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  گویند و آن را با  $A \cap B$  نشان می‌دهند. نمودار  $A \cap B$  به صورت مقابل است:

✓ تفاضل دو مجموعه‌ها: تفاضل مجموعه‌ی  $B$  از  $A$  که با  $A - B$  نشان داده می‌شود، مجموعه‌ی عناصری از  $A$

است که در مجموعه‌ی  $B$  نباشد، ناحیه‌ی  $A - B$  در شکل مقابل مشخص شده است.

• مثال ۷: اگر  $A = \{1, 2, 3\}$ ،  $B = \{2, 3, 4\}$  آنگاه  $A - B$ ،  $A \cap B$ ،  $B - A$  را به دست آورید.

✍ حل:

$$A \cap B = \{2, 3\} \quad A - B = \{1\} \quad B - A = \{4\}$$

• مثال ۸: اگر  $A = \{3, 6, 9\}$ ،  $B = \{3, 7, 8\}$  آنگاه حاصل عبارت  $(A \cup B) - (A \cap B)$  را به دست آورید.

✍ حل: ابتدا  $A \cup B$ ،  $A \cap B$  را به دست می‌آوریم:

$$A \cup B = \{3, 6, 7, 8, 9\}, \quad A \cap B = \{3\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \{3, 6, 7, 8, 9\} - \{3\} = \{6, 7, 8, 9\}$$

• مثال ۹: نمودار ناحیه‌ی  $(A \cup B) - A$  را با سایه زدن مشخص کنید.

✍ حل: کافی است ناحیه‌ی متنظر مجموعه‌ی  $A$  را از ناحیه  $A \cup B$  برداریم.

✓ دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا): دو مجموعه که تهی نباشند ولی اشتراکشان تهی باشد را دو مجموعه جدا از هم گویند.  $(A \cap B = \emptyset)$

• مثال ۱۰: اگر  $A$  و  $B$  جدا از هم و  $C$  و  $B$  نیز جدا از هم باشند، آیا همواره  $A$  و  $C$  جدا از هم هستند؟ چرا؟

✓ حل: می‌توانند  $A$  و  $B$  و  $C$  به صورت بالا باشند. لذا  $A$  و  $C$  جدا از هم می‌شوند ولی این مطلب همواره درست نیست. زیرا ممکن است سه مجموعه  $A$  و  $B$  و  $C$  به صورت زیر باشند. در این صورت  $A$  و  $C$  جدا از هم نیستند.

### د) مدلسازی

اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی متناهی باشند در آن صورت تعداد اعضای مجموعه‌های  $A \cup B$ ،  $A \cap B$  و  $A - B$  را می‌توان به صورت‌های زیر به دست آورد.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

تعداد اشتراک  $A \cap B$  هم در  $n(A)$  و هم در  $n(B)$  محاسبه شده است در صورتیکه باید یکبار حساب شود. برای همین منظور یکبار  $n(A \cap B)$  را کم می‌کنیم.

📖 تذکر ۳: اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند. در آن صورت داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

اگر باشد در آن صورت تعداد اعضای مجموعه‌ی با جمع تعداد اعضای  $A$  و  $B$  برابر است.

• مثال ۱۱: در یک کلاس ۳۰ نفری ۱۷ نفر در کارهای ورزشی و ۲۲ نفر در کارهای علمی شرکت می‌کنند. چند نفر در هر دو فعالیت ورزشی و علمی شرکت دارند؟

✓ حل:

### ه) مجموعه‌های متناهی و نامتناهی – مشخص کردن مجموعه‌ها

✓ مجموعه متناهی – مجموعه نامتناهی: اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد و عمل شمارش آنها نهایتاً به انتها برسد، گوئیم آن مجموعه متناهی است و در غیر این صورت مجموعه نامتناهی است.

📖 تذکر ۴: مجموعه تهی را نیز متناهی و تعداد اعضای آن را صفر در نظر می‌گیریم.

• مثال ۱۲: از مجموعه‌های زیر کدام‌ها متناهی‌اند؟

(ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح کمتر از صد

(الف) مجموعه‌ی انسان‌های روی زمین

(د) مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین صفر و یک

(ج) مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱۰ رقمی

حل : مجموعه انسان‌های روی زمین و مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱۰ رقمی، متناهی و دو مجموعه‌ی دیگر نامتناهی‌اند.

### (و) روش‌های مشخص کردن یک مجموعه :

- ۱- نمایش تفضیلی
- ۲- نمایش توصیفی یا نمایش با علامت‌های ریاضی
- ۳- نمایش با نمودار ون

**الف) نمایش تفضیلی :** در این نوع نمایش اعضای مجموعه را به طور کامل در میان دو ابرو (آگلاد) قرار می‌دهیم. اگر اعضای مجموعه نامتناهی باشند چند عضو مجموعه را که با آنها بتوان بقیه اعضا را مشخص کرد نوشته و در انتهای آن چند نقطه به معنی بی‌پایان بودن مجموعه می‌گذاریم.  
به عنوان مثال :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$C = \{y, h, w, \dots, j, c, j, t, r, p, b, a, f\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

نمایش تفضیلی برای مجموعه‌های نامتناهی زیاد جالب نیست. در این حالت از نمایش دیگری به نام توصیفی استفاده می‌کنیم.

**ب) نمایش توصیفی :** در این نوع نمایش ویژگی اعضا را بین دو ابرو (آگلاد) بیان می‌کنیم. در صورت امکان در این حالت از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنیم. برای نمونه :

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ عددی اول است}\}$$

$$B = \{x \mid 5x + 2 = 0, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$C = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$$

$$O = \{x \mid x \text{ عددی فرد طبیعی است}\}$$

علامت « $\mid$ » در این مجموعه‌ها به صورت «به طوریکه» یا «به قسمی که» خوانده می‌شود نوع دیگر نمایش، نمایش هندسی یا نمودار ون است.

(ج) نمایش نمودار ون: در این نوع نمایش اعضای یک مجموعه را درون

یک منحنی ساده بسته مانند مستطیل، دایره، بیضی یا هر شکل منظم یا

نامنظم دیگری نشان می‌دهیم.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

• مثال ۱۳: مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید:

$$A = \{2x | x \in \mathbb{N}, x < 11\} \quad B = \{x^2 | x \in \mathbb{N}, x < 10\} \quad C = \{5x | x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 3\}$$

حل:

$$A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 20\} \quad B = \{1, 4, 9, 16, \dots, 81\} \quad C = \{-10, -5, 0, 5, 10\}$$

• مثال ۱۴: مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید:

$$A = \{-20, -16, -12, -8, \dots\} \quad B = \{1, 8, 27, 64, 125\} \quad C = \{5, 11, 17, 23, 29, \dots\}$$

حل:

$$A = \{4x | x \in \mathbb{Z}, x \geq -5\} \quad B = \{x^3 | x \in \mathbb{N}, x < 6\} \quad C = \{6k - 1 | k \in \mathbb{N}\}$$

• مثال ۱۵: کدامیک از مجموعه‌های زیر، متناهی و کدامیک نامتناهی‌اند؟

(الف) مجموعه‌های ماه‌های سال

(ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت

(ج) مجموعه‌ی انگشتان دست‌های دانش‌آموزان یک مدرسه

(د) مجموعه‌ی نقاط روی یک خط

حل:

(الف) متناهی است؛ در یک سال ۱۲ ماه وجود دارد.

(ب) نامتناهی است؛ چون اعداد صحیح و مثبت، پایانی ندارند.

(ج) متناهی است؛ در یک مدرسه خاص می‌توان انگشتان دانش‌آموزان را شمرد.

(د) نامتناهی است؛ چون نمی‌توانیم تعداد نقاط یک خط را بشماریم.

## مجموعه‌ها

الف) مفهوم مجموعه، تساوی مجموعه‌ها، عضویت :

۱- کدامیک از موارد زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) اعداد طبیعی یک رقمی (ب) دانش‌آموزان باهوش

ج) اعداد بسیار بزرگ (د) دانش‌آموزان مدرسه شما

۲- کدامیک از موارد زیر درست است؟

الف)  $-5 \in \mathbb{Z}$

ب)  $-2/5 \in \mathbb{W}$

ج)  $1/3 \in \mathbb{Z}$

د)  $0 \notin \mathbb{W}$

هـ)  $3/14 \notin \mathbb{Q}$

و)  $\pi/3 \notin \mathbb{Q}$

۳- کدامیک از اعداد زیر متعلق به مجموعه اعداد صحیح نامثبت است؟

د)  $\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$

ج)  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) صفر

الف)  $\pi^2 - 10$

۴- کدامیک از عبارات زیر درست است؟

ب)  $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$

الف)  $\{\{a\}\} \in \{a, \{a\}\}$

د)  $\{a\} \in \{a, b, c\}$

ج)  $a \in \{\{a\}, \{c\}\}$

۵- مقدار  $x, y$  را طوری بیابید که مجموعه‌های  $A$  با  $B$  برابر باشند.

الف)  $A = \{3, x + y\}$  ,  $B = \{x, 5\}$

ب)  $A = \{\{5\}, \{x - y\}\}$  ,  $B = \{\{x - 1\}, \{3\}\}$

۶- مجموعه  $\{\emptyset\}$  با کدامیک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

الف)  $\{0\}$

ب)  $\{\{\emptyset\}\}$

ج)  $\{\}$

د)  $\{\emptyset, \{\}$

هـ)  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

و)  $\{\{\}$

۷- به ازای چه مقادیری از  $a, b$  مجموعه‌های زیر با هم برابرند؟

$$\text{الف) } \{b-1, \{0\}\} \text{ و } \{a+2, 7\}$$

$$\text{ب) } \{a^2, b+2\} = \{-3, 0\}$$

$$\text{ج) } \left\{a+2b, \frac{b}{3}\right\} = \{1\}$$

**ب) زیر مجموعه:**

۸- کدامیک از موارد زیر درست است؟

- |                                         |                                                |                                      |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------|
| $N \subset Q$ (ج)                       | $N \in \mathbb{R}$ (ب)                         | $N \in \mathbb{Z}$ (الف)             |
| $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}$ (و) | $\mathbb{Z} \subset Q \subset \mathbb{R}$ (هـ) | $N \subset W \subset \mathbb{Z}$ (د) |
| $W \subset N$ (ط)                       | $W \not\subset \mathbb{Z}$ (ح)                 | $W \subset Q$ (ز)                    |
|                                         |                                                | $N \not\subset W$ (ی)                |

۹- کدامیک از موارد زیر الزماً درست است؟ (A مجموعه‌ای دلخواه است)

- |                                       |                                 |
|---------------------------------------|---------------------------------|
| $\emptyset \subset A$ (ب)             | $\emptyset \subset \{ \}$ (الف) |
| $\emptyset \in \emptyset$ (د)         | $\{ \} \in A$ (ج)               |
| $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ (و) | $\{\emptyset\} \subset A$ (هـ)  |
| $A \subset \emptyset$ (ح)             | $A \subset A$ (ز)               |

۱۰- مجموعه‌ی  $A = \{\emptyset, a, \{a\}, \{a, \{a\}\}$  مفروض است. کدامیک از موارد زیر نادرست است؟

- |                               |                              |                               |
|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| $\{\{a\}\} \not\subset A$ (ج) | $\{a, \{a\}\} \subset A$ (ب) | $\{a\} \subset A$ (الف)       |
| $\emptyset \subset A$ (و)     | $\{a, \{a\}\} \in A$ (هـ)    | $\{a\} \in A$ (د)             |
| $\emptyset \in A$ (ط)         | $a \subset A$ (ح)            | $A \subset A$ (ز)             |
|                               |                              | $\{\emptyset\} \subset A$ (ی) |

۱۱- تمام زیر مجموعه‌های مجموعه  $\{1, \{1\}\}$  را بنویسید.



## ج) اعمال روی مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک، تفاضل):

۱۲- اگر مجموعه  $A$  مجموعه اعداد غیراول یک رقمی و مجموعه  $B$  مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی بزرگتر از ۴ باشد،  $B - A$ ،  $A - B$ ،  $A \cup B$ ،  $A \cap B$  را بدست آورید.

۱۳- تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\text{الف) } A \subset A \Rightarrow \begin{cases} A \cup A = \\ A \cap A = \end{cases} \text{ می دانیم}$$

$$\text{ب) } \text{if } \emptyset \subset A \Rightarrow \begin{cases} A \cup \emptyset = \\ A \cap \emptyset = \end{cases}$$

$$\text{ج) } \text{if } A \subset (A \cup B) \Rightarrow A \cap (A \cup B) =$$

$$\text{د) } \text{if } (A \cap B) \subset A \Rightarrow A \cup (A \cap B) =$$

$$\text{ه) } A \cup (A \cap \emptyset) =$$

$$\text{و) } A \cap (A \cup \emptyset) =$$

۱۴- مجموعه‌ی مساوی با تفاضل‌های زیر را مشخص کنید.

$$\text{الف) } \mathbb{R} - \mathbb{Q} =$$

$$\text{ب) } \mathbb{Z} - \mathbb{N} =$$

$$\text{ج) } \mathbb{N} - \mathbb{W} =$$

$$\text{د) } \mathbb{W} - \mathbb{N} =$$

$$\text{ه) } \mathbb{Q} - (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) =$$

$$\text{و) } \mathbb{W} - (\mathbb{W} - \mathbb{N}) =$$

۱۵- اگر  $A \subset B \subset C$  باشد، مجموعه‌های زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{ب) } (A - B) \cup (B \cup C)$$

۱۶- در هر یک از نمودارهای زیر، مجموعه‌ی خواسته شده را هاشور بزنید.

$$\text{ج) } (A - B) \cup (C - B)$$

$$\text{ب) } C - (A \cup B)$$

$$\text{الف) } (A - B) \cup C$$

$$\text{و) } (A - C) \cap (B \cap A)$$

$$\text{ه) } (C - B) \cup A$$

$$\text{د) } (A - B) \cap C$$

۱۷- اشتراک دسته مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف)  $A = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  ,  $B = \{\emptyset - \{\emptyset\}\}$

ب)  $A = \{a, \{a, b\}\}$  ,  $B = \{\{a\}, b, a, \{a, b\}\}$

ج)  $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  ,  $P = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$

۱۸- اگر  $A_1 = \{a\}$  ,  $A_2 = \{a, b\}$  ,  $A_3 = \{a, b, c\}$  و  $A_4 = \{a, b, c, d\}$  مطلوب‌ست :

الف)  $\bigcap_{i=3}^4 A_i$

ب)  $\bigcap_{i=1}^3 A_i$

۱۹- اگر  $A = \{a, b, e, f, m\}$  ,  $B = \{f, g, m, n\}$  حاصل هریک از را بیابید.

الف)  $A \cup B$

ب)  $A \cap B$

ج)  $A - B$

د)  $B - A$

و)  $[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B)$

هـ)  $(A \cup B) - (A \cap B)$

۲۰- حاصل هریک از عبارتهای زیر را روی نمودار ون داده شده نشان دهید :

الف)  $(A \cup B) - (A \cap B)$

ب)  $B \cap (A \cup C)$

ج)  $(A \cup C) - B$

د)  $[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B)$

هـ)  $A - (A \cap B)$

و)  $(A \cup B) \cap A$

ز)  $A - (A \cap B \cap C)$

۲۱- در هریک از نمودارهای زیر، کدامیک از مجموعه‌های زیر قسمت هاشور خورده را نشان می‌دهد.

- $(A - B) \cap B$   
  $(A \cap B) \cup A$  (الف)  
  $(B - A) \cup B$

- $A - (B - A)$   
  $(A \cup B) - B$  (ب)  
  $(A \cup B) - A$

- $(A - B) \cap (B - A)$   
  $(B - A) \cup (A \cap B)$  (ج)  
  $[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B)$

- $(A - B) \cap C$   
  $(A \cup C) - B$  (د)  
  $(A \cup B) - A$

- $A \cap B \cap C$   
  $(A \cup C) - C$  (ه)  
  $(A - B) \cup C$

**د) مدل‌سازی:**

۲۲- در یک کلاس ۳۵ نفری، ۲۳ نفر عضو تیم فوتبال و ۲۰ نفر عضو تیم والیبال و ۳ نفر عضو هیچ تیمی نیستند. چند نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

۲۳- در یک مهمانی ۱۲ نفر چای و ۹ نفر قهوه نوشیدند. در صورتیکه ۳ نفر هر دو نوع نوشیدنی چای و قهوه را مصرف کرده‌اند. تعداد مهمانان چند نفرند؟

۲۴- در یک جمع ۴۰ نفره، ۱۷ نفر با علی دوست هستند. همچنین ۱۲ نفر با هیچ یک از علی و رضا دوست نیستند و ۵ نفر با هر دو دوست هستند، چند نفر از این جمع فقط با رضا دوست هستند؟

۲۵- در بین ۱۵۰ نوزاد، ۶۰ نفر واکسن فلج اطفال، ۷۰ نفر واکسن کزاز را تزریق کرده‌اند. در ضمن ۴۰ نفر هیچ یک از این واکسن‌ها را تزریق نکرده‌اند. چقدر تا از این ۱۵۰ تا نوزاد فقط یکی از دو واکسن را تزریق کرده‌اند.

۲۶- در یک پرسشنامه که توسط یک گروه ۳۶ نفری جواب داده شده است. کسانیکه روزنامه A را نمی‌خوانند ۲۲ نفر و کسانیکه روزنامه B را نمی‌خوانند ۲۰ نفر و تعداد کسانیکه هر دو روزنامه را می‌خوانند ۵ نفر هستند. تعیین کنید چند نفر هیچ یک از دو روزنامه A و B را نمی‌خوانند.

## هـ) مجموعه متناهی و نامتناهی و مشخص کردن مجموعه‌ها :

۲۷- متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$$B = \left\{ x \mid x = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ (ب)}$$

$$A = \left\{ \frac{3x-1}{2} \mid x \in \mathbb{N}, x < 8 \right\} \text{ (الف)}$$

د) مجموعه اعداد گویا بین ۰/۱ تا ۳/۳

ج) مجموعه اعداد اول ۲ رقمی

$$C = \left\{ x \mid x = \frac{n^3+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ (و)}$$

هـ) مجموعه اعداد صحیح ۱۰۰ رقمی

۲۸- هریک از مجموعه‌های زیر را به صورت اعضای آن بنویسید.

$$A = \left\{ x \mid x = \frac{2^k}{k+1}, k \in \mathbb{N} \right\} \text{ (الف)}$$

$$B = \{ 2^x + 3^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 7 \} \text{ (ب)}$$

$$C = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0 \} \text{ (ج)}$$

$$D = \left\{ \frac{x^2+4}{3x+2} \mid x \in \mathbb{N}, x < 8 \right\} \text{ (د)}$$

$$E = \left\{ x^2 \mid n = \frac{x}{2}, n \in \mathbb{N}, (x-12)(x-21) = 0 \right\} \text{ (هـ)}$$

$$F = \{ \sqrt{x-1} \mid x \in P, \sqrt{x-1} \in \mathbb{N}, x \leq 37 \} \text{ (و)}$$

۲۹- هریک از مجموعه‌ها را به بیان ریاضی بنویسید.

$$A = \left\{ \frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, \dots, 128 \right\} \text{ (الف)}$$

$$B = \{ 77, 707, 7007, \dots \} \text{ (ب)}$$

$$C = \{ 8, 12, 14, 16, \dots \} \text{ (ج)}$$

**(ه) مسائل تکمیلی**

۳۰- نوید و علی در یک مدرسه هستند تعداد دانش آموزان مدرسه ۲۱۵ نفر می‌باشد ۱۵۴ نفر از شاگردان دوستان علی و نوید نمی‌باشند نوید ۳۹ دوست دارد و تعداد دوستان مشترک علی و نوید ۹ نفر است تعداد دوستان علی چند نفر است؟

۳۱- از دانش آموزان دو کلاس روی هم ۷۲ نفر در درس ریاضی و ۶۷ نفر در درس فیزیک و ۶۵ نفر در هر دو درس قبول شده‌اند اگر ۵ نفر در هر دو درس مردود شده باشند دو کلاس روی هم چند دانش آموز دارد.

۳۲- دانش آموزان سال چهارم یک کلاس ۲۵۰ نفرند هر کدام یک گروه ورزشی را انتخاب کرده‌اند ۴۰ درصد آنها فوتبال و نصف بقیه والیبال بازی می‌کنند چند دانش آموز فوتبال یا والیبال بازی نمی‌کنند.

۳۳- در یک کلاس ۳۲ نفره، فوتبال ورزش مورد علاقه ۲۴ نفر و والیبال ورزش مورد علاقه ۱۸ نفر می‌باشد در این کلاس چند نفر هستند که هم به فوتبال و هم به والیبال علاقه دارند؟

۳۴- در یک کنفرانس ۴۵ نفری ۳۰ نفر کلاه دارند ۲۱ نفر عینک زده‌اند که بین آنها ۸ نفر هم کلاه دارند و هم عینک:

الف) تعداد کسانی که عینکی هستند ولی کلاه ندارند

ب) فقط کسانی که کلاه یا عینک دارند

ج) تعداد افرادی که نه کلاه دارند و نه عینک

۳۵- اگر  $A$  مجموعه‌ی همه آسیایی‌ها و  $B$  مجموعه‌ی همه ورزشکاران جهان باشد هر یک از مجموعه‌ها معرف چه کسانی است؟

الف)  $A \cap B$

ب)  $A - B$

ج)  $B - A$

۳۶- با توجه به موارد زیر در کدام حالت دو مجموعه A و B جدا از همند؟

الف) A: مجموعه اعداد صحیح نامنفی      B: مجموعه اعداد صحیحی که نه مثبت‌اند و نه منفی

ب) A: مجموعه‌ی اعداد اول زوج      B: مجموعه اعداد طبیعی که نصف آنها زوج است

ج)  $\emptyset = A$       B:  $\{\emptyset\}$

۳۷- درستی و نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید؟

الف)  $(R - Q) \subset Z$       د)  $A - A = \emptyset$       و)  $(Q - N) \cap Z = \emptyset$

ب)  $N \subset (Q - Z)$       ه)  $(Q - W) \subset R$

ج)  $W \cap (Z - W) = \{0\}$       ی)  $(Z - W) \cap N = \emptyset$

۳۸- اگر  $E = \{1, 2, \{1, 2\}\}$  باشد کدام نادرست است؟

الف)  $\{1\} \in E$       ب)  $\emptyset \in E$       ج)  $\{1, 2\} \in E$       د)  $\{1, 2\} \subset E$

۳۹- همه زیر مجموعه‌های A و B را محاسبه کنید.

$A = \{\{2\}, 2, \{2, 2\}\}$        $B = \{\{5\}, \{5, 5, 5\}\}$

۴۰- کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

1)  $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$       5)  $\{a\} \in \{a, \{b\}\}$

2)  $\{\emptyset\} \in \emptyset$       6)  $\{1\} \in \{1\}$

۳)  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$       7)  $1 \in \{\{1, 2, 3\}\}$

۴)  $\emptyset = \{\emptyset\}$       8)  $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

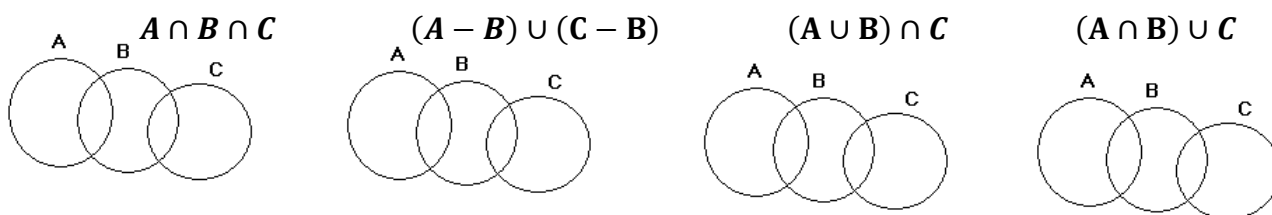
۴۱- کدامیک از توصیف‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰      ب) تمام دانش‌آموزان با اخلاق یک کلاس

ج) گل‌های زیبای یک گل‌فروش      د) مجموعه کتاب‌های درسی رشته ریاضی در ایران

ه) چهار عدد فرد طبیعی متوالی      م) عدد طبیعی که هم زوج است و هم اول

۴۲- با توجه به مجموعه‌های داده شده نمودارهای مقابل را هاشور بزنید؟



۴۳- با فرض  $A = \{x \in \mathbb{Z} | 2x = 6\}$  ،  $B = \{3\}$  آیا  $A$  و  $B$  مساویند. چرا؟

۴۴- مقدار عضوهای مجموعه  $A = \{x | x \neq x\}$  را بنویسید؟

۴۵- با توصیف فارسی مجموعه  $A = \{3, 5, 7, 9\}$  را بنویسید.

۴۶- اگر  $A = \{x | x \in \mathbb{N} , 11 < x \leq 20\}$  ،  $B = \{x | x \in \mathbb{N} , -4 \leq x \leq 100\}$  باشد

$A \cup B$  ،  $A \cap B$  را به زبان ریاضی بنویسید.

۴۷- اگر  $A \subset B$  ،  $B \subset A$  باشد درباره  $A$  و  $B$  چه می‌توان گفت؟

۴۸- اگر  $A \subset B$  ،  $B \subset C$  باشد درباره  $A$  و  $C$  چه می‌توان گفت؟

۴۹- مجموعه نقاط یک خط را  $A$  و مجموعه نقاط یک خط دیگر را  $B$  می‌نامیم دو خط در یک صفحه قرار دارند

$A \cap B$  چه حالت‌هایی را می‌تواند داشته باشد.

۵۰- اگر  $E$  و  $F$  دو مجموعه باشند و  $F \cup E = E$  آنگاه  $E$  و  $F$  نسبت به هم چگونه‌اند اگر  $F \cap E = E$  باشد آنگاه

$E$  و  $F$  نسبت به هم چگونه‌اند؟



۵۱- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$   $B = \{2, 3, 5, 7\}$   $C = \{1, 3, 5\}$  مفروض هستند تساوی‌های مقابل را

نشان دهید.

الف)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ب)  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

۵۲- اگر  $A - B = \emptyset$  درباره  $A$  و  $B$  چه می‌توان گفت؟

۵۳- اگر  $A \subset C \subset B$  باشد حاصل عبارت مقابل را بدست آورید؟

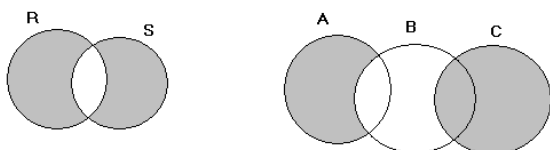
$$(B \cap C) - (A \cup B)$$

۵۴- اگر  $A \cap B = \emptyset$  درباره  $A$  و  $B$  چه می‌توان گفت؟

۵۵- اگر  $A \cup B = \emptyset$  باشد درباره  $A$  و  $B$  چه می‌توان گفت؟

۵۶- اگر  $x \in (A \cup B)$  باشد می‌توان نتیجه گرفت که  $x \in B$  است. چرا؟

۵۷- برای قسمت هاشور خورده مجموعه مناسب بنویسید.



۵۸- عبارت  $[(A \cap B) - A] - [(A \cup B) - (A \cap B)]$  را ساده کنید.

۵۹- مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی بنویسید.

الف)  $A = \{0, 5, 10, 15, \dots\}$

ب)  $B = \left\{-1, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{7}, \dots\right\}$

۶۰- کدامیک از مجموعه‌های زیر، متناهی و کدامیک نامتناهی هستند؟

الف)  $A = \{4n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$  (الف) مجموعه اعداد گویای بین  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{3}$

ج)  $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 < 100\}$  (ج) مجموعه اعداد اول زوج

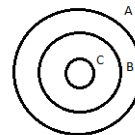
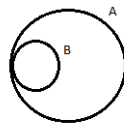
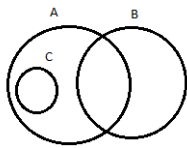
۶۱- تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی  $A = \{\{a, b, c, d, e, f\}\}$  چندتاست؟ آنها را مشخص کنید.

۶۲- در شکل‌های زیر آنچه خواسته شده است را سایه بزنید.

الف)  $\begin{cases} (A \cup C) - B \\ (A \subset C) \cap B \end{cases}$

ب)  $A - B$

ج)  $(C \cup B) \cap (C \cap A)$



۶۳- مجموعه‌های زیر را با رسم نمودار مشخص کنید و نتیجه را بیان کنید. (در این نمودار باید A و B و C دو به

دو و هر سه باهم اشتراک داشته باشند)

1)  $A - (B \cap C)$   
2)  $(A - B) \cap (A - C)$   
3)  $(A - B) - (A - C)$

4)  $A - (B \cup C)$   
5)  $(A - B) \cup (A - C)$   
6)  $A - (B - C)$

۶۴- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را بررسی کنید.

الف) اگر  $A$  و  $B$  جدا از هم باشند و  $C$  نیز جدا از هم باشند، آنگاه  $A$  و  $C$  جدا از هم‌اند.

ب) اگر  $A$  و  $B$  جدا از هم باشند، آنگاه  $A - B$  و  $A$  نیز جدا از هم‌اند.

پ) اگر مجموعه  $A$  متناهی باشد، آنگاه همهی زیر مجموعه‌های  $A$  نامتناهی هستند.

ت) اگر مجموعه  $A$  نامتناهی باشد، آنگاه همهی زیر مجموعه‌های  $A$  نامتناهی هستند.

ث) اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه نامتناهی باشند، آنگاه  $A \cap B$   $A - B$   $A \cup B$  نیز متناهی‌اند.

۶۵- همهی زیر مجموعه‌های مجموعه  $A = \{\emptyset, \{0\}, \{0, \emptyset\}\}$  را بنویسید.

۶۶- مجموعه‌ی  $A = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$  مفروض است. کدامیک از موارد زیر درست است؟

- |                      |                             |
|----------------------|-----------------------------|
| 1) $1 \in A$         | 4) $\{\{1\}\} \in R$        |
| 2) $\{1\} \in A$     | 5) $\{1, \{1\}\} \subset A$ |
| 3) $\{\{1\}\} \in A$ | 6) $\{1, \{1\}\} \in A$     |

۶۷- هریک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف)  $A = \left\{ \frac{x}{5} \mid x \notin N, x < 7 \right\}$

ب)  $B = \{x^2 \mid x \in Z, x > -2, x < 2\}$

$$\text{ج) } C = \left\{ \frac{|x|}{2+|x|} \mid x \in \mathbb{Z}, x < 2, x > -3 \right\}$$

$$\text{د) } D = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}, k < 5\}$$

$$\text{هـ) } E = \{x^3 - x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -3, x < 2\}$$

$$\text{و) } F = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 5 \right\}$$

۶۸- هریک از مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید.

$$\text{الف) } A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$\text{ب) } B = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$\text{ج) } C = \{0/1, 0/01, 0/0001, \dots\}$$

$$\text{د) } D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \right\}$$

$$\text{هـ) } E = \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots \right\}$$

$$\text{و) } F = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4\}$$

$$\text{ز) } G = \{-7, -2, 3, 8, 13, 18\}$$

۶۹- متناهی و یا نامتناهی نبودن (نامتناهی) مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$$1) A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x \pm 2| = 0\} \quad 2) B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 2, x < 3\}$$

$$3) C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 1\} \quad 4) D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$$

۷۰- مجموعه  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq 1, x \leq 10\}$  را در نظر بگیرید مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) زیرمجموعه‌ای از  $A$  که عضوهای آن زوج باشد.

ب) زیرمجموعه‌ای از  $A$  که عضوهای آن فرد باشد

۷۱- یک مجموعه  $2k + 5$  دارای ۱۲۸ زیرمجموعه است  $k$  را بیابید.

۷۲- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی  $8^{3n-8}$  است. این مجموعه چند عضو دارد؟

۷۳- اگر تعداد زیرمجموعه‌ها یک مجموعه  $2n + 1$  عضوی ۳۲ زیرمجموعه بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک

مجموعه  $2n$  عضوی باشد مطلوب است تعداد اعضای دو مجموعه را؟

۷۴- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k+3$  عضوی ۴۸ واحد کمتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k+5$

عضوی است  $k$  را بیابید.

۷۵- هرگاه تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه  $2m$  عضو  $22$  برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $m$  عضو باشد،  $m$  چند است؟

۷۶- تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه  $n+6$  عضو برابر  $64^{\left(\frac{5}{6}n-3\right)}$  است این مجموعه چند عضو دارد؟

### ( و ) محتوی تکمیلی :

تعریف ۶: ( عدد اصلی یک مجموعه )

تعداد عضوهای یک مجموعه‌ی متناهی را عدد اصلی آن مجموعه می‌نامیم. عدد اصلی مجموعه‌ای مانند  $A$  را با  $n(A)$  یا  $|A|$  ( با قدر مطلق اشتباه نشود ) نشان می‌دهیم.

• مثال ۱۶: عدد اصلی مجموعه‌های متناهی زیر را به دست آورید.

$$C = \{x \mid x \text{ مقسوم علیه های مثبت } 18 \text{ است}\}$$

حل: واضح است که  $n(A) = n(B) = 4$ . اما ابتدا اعضای مجموعه‌ی  $C$  را می‌نویسیم.

$$\text{داریم: } C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \text{ پس } n(C) = 6$$

تعریف ۷: اگر  $A \subset B$  ولی  $A \neq B$  آنگاه  $A$  را زیرمجموعه‌ی محض یا زیرمجموعه سیره‌ی  $B$  می‌نامیم.

• مثال ۱۷: نشان دهید که مجموعه‌ی  $\{1, 2\}$  زیرمجموعه‌ی سره یا محض مجموعه‌ی  $B = \{1, 2, 3\}$  است.

حل: چون اعضای  $A$  یعنی اعداد ۱ و ۲ متعلق به  $B$  هم هستند پس  $A \subset B$ . اما  $3 \in B, 3 \notin A$  در نتیجه

$A \neq B$ . بنابراین  $A$  زیرمجموعه‌ی محض  $B$  است.

قضیه ۴: اگر  $A$  یک مجموعه‌ی متناهی باشد، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های  $A$  برابر است با  $2^{n(A)}$  است،

که در آن  $n(A)$  عدد اصلی مجموعه‌ی  $A$  است.

نکته ۸: تعداد زیر مجموعه‌های محض، مجموعه‌ی متناهی  $A$  عبارت است از:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های محض } A = 2^{n(A)} - 1$$

• مثال ۱۸: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۹ عضوی را به دست آورید؟

✍ حل: فرض می‌کنیم که مجموعه‌ی مورد نظر برابر  $A$  باشد و  $n(A) = 9$ .

در آن صورت  $\blacksquare$  تعداد زیرمجموعه‌های  $A = 2^{n(A)} = 2^9 = 512$

• مثال ۱۹: تعداد زیرمجموعه‌های محض، مجموعه‌ی  $A$  برابر ۱۲۷ است. مجموعه‌ی  $A$  چند عضو دارد؟

✍ حل: طبق نکته‌ی (۸) می‌دانیم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های محض} = 2^{n(A)} - 1 = 127$$

$$\blacksquare \text{مجموعه‌ی } A \text{ دارای } 7 \text{ عضو است} \Rightarrow n(A) = 7 \Rightarrow 2^{n(A)} = 128 = 2^7$$

تعریف ۸: (مجموعه توانی)

فرض کنید که مجموعه‌ی دلخواهی مانند  $A$  داده شده باشد. در آن صورت به مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های  $A$ ، مجموعه‌ی توانی  $A$  گفته می‌شود و آن را با  $P(A)$  نشان می‌دهند.

نکته ۹: مجموعه‌ی توانی هم برای مجموعه‌های متناهی و هم برای مجموعه‌های نامتناهی تعریف می‌شود. ولی در دبیرستان ما فقط با حالت متناهی آن سروکار داریم.

• مثال ۲۰: اگر مجموعه‌های  $\emptyset, \{1\}, \{1, \{1\}\}$  مفروض باشند. مجموعه‌ی توانی هر یک را مشخص کنید.

✍ حل:  $A = \emptyset, B = \{1\}, C = \{1, \{1\}\}$  در نظر می‌گیریم. طبق تعریف می‌دانیم که به مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند  $A$  مجموعه توانی  $A$  گفته می‌شود.

$$A = \emptyset \Rightarrow \text{زیرمجموعه‌های } A: \emptyset \Rightarrow P(A) = \{\emptyset\}$$

مجموعه‌ی  $B$  یک مجموعه‌ی تک عضوی است. پس تعداد زیرمجموعه‌های آن  $2^1$  است.

$$B = \{1\} \Rightarrow \text{زیرمجموعه‌های } B: \emptyset, \{1\} \Rightarrow P(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

مجموعه‌ی  $C$  دو عضوی است پس تعداد زیرمجموعه‌های آن  $2^2$  یعنی ۴ است.

$$C = \{1, \{1\}\} \Rightarrow \text{زیرمجموعه‌های } C: \emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}$$

در نتیجه:

$$\blacksquare \Rightarrow P(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$$

## ز) مجموعه‌ی مرجع و متمم

مفهوم مجموعه‌ی همه مجموعه‌ها یعنی مجموعه‌ی جهانی به معنای مفهوم مطلق آن وجود ندارد. زیرا اگر فرض کنیم که این، مجموعه جهانی وجود دارد، آنگاه به یک تناقض می‌رسیم. برای جلوگیری از تناقض معمولاً ما مجموعه‌ی مرجع را «مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها» در نظر نمی‌گیریم. در یک بحث معین، تمام عضوهای مجموعه‌های مورد مطالعه متعلق به مجموعه‌ای موسوم به مجموعه‌ی مرجع می‌باشند. به عبارت دیگر، در هر بحث دلخواهی گفتگویی است در بازه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی مرجع. به عنوان مثال وقتی از اشخاص صحبت می‌شود بهتر است مجموعه‌ی مرجع را مجموعه‌ی انسان‌ها در نظر بگیریم. وقتی از اعداد در حساب صحبت می‌کنیم، مجموعه مرجع برابر با  $\mathbb{R}$  است.

تعریف ۹: به مجموعه‌ای که ما همه‌ی مجموعه‌های خود را از آن انتخاب می‌کنیم یا به عبارت دیگر در یک بحث معین عناصری که مورد بررسی ما هستند همگی از یک مجموعه به نام مجموعه‌ی مرجع یا جهانی یا عام می‌باشند. ما معمولاً مجموعه‌ی مرجع را با  $U$  یا  $M$  نشان می‌دهیم. همچنین در نمودار ون مجموعه‌ی مرجع را با یک مستطیل نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰: اگر  $U$  مجموعه‌ی مرجع و  $A$  یک زیر مجموعه‌ی دلخواه از آن باشد. در آن صورت متمم  $A$  را با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم، و  $A'$  مجموعه‌ای از عضوهای  $U$  است که متعلق به  $A$  نباشد.

$$x \in A' \Rightarrow x \in U, x \notin A$$

• مثال ۲۱: هرگاه مجموعه‌ی دانش‌آموزان کشور را مجموعه‌ی مرجع  $U$  در نظر بگیریم. و مجموعه‌ی دانش‌آموزان پسر کشور را  $A$  بگیریم. مجموعه‌ی  $A'$  را مشخص کنید.

✍ حل: دانش‌آموزان از لحاظ جنسیت یا پسر هستند یا دختر.

$$A' = \{x \in U | x \notin A\} = \{x \in U | \text{پسر نیست}\}$$

$$A' = \{x \in U | \text{دختر است}\} \Rightarrow A \text{ دختر}$$

• مثال ۲۲: مجموعه‌ی از مجموعه‌ی مرجع را در نظر بگیرید:

الف)  $A'$  را به دست آورید.

ب) نشان دهید که  $(A')' = A$

ج) نشان دهید:  $U' = \emptyset$



حل:

الف)  $A'$  یعنی عضوهایی از  $U$  که در  $A$  نباشند.

$$A' = \{x | x \in U, x \notin A\} = \{1, 3, 5, 7\}$$

ب) اگر  $A'$  را مجموعه‌ی فوق در نظر بگیریم. مجموعه‌ی  $(A')'$  اعضای  $U$  هستند که در  $A'$  نیستند.

$$(A')' = \{x | x \in U, x \notin A'\} = \{2, 4\}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود  $(A')' = A$ ج) می‌دانیم که  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $U'$  یعنی مجموعه‌ای که عضوهای آن در  $U$  نباشد. پس  $U'$ شامل هیچ عضوی نیست. زیرا  $U$  همه‌ی اعضای مورد بحث ما را شامل می‌باشد.• مثال ۲۳: اگر دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌ی، مجموعه‌ی مرجع  $U$  باشند و  $A = B$  آنگاه  $A' = B'$ حل: ثابت می‌کنیم که  $A' \subset B'$ ،  $B' \subset A'$  است. برای این منظور عضوی را از  $A'$  در نظر می‌گیریم.

$$\forall x \in A' \Rightarrow x \in U, x \notin A \xrightarrow{A=B} x \in U, x \notin B \Rightarrow x \in B' \Rightarrow A' \subset B'$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که  $B' \subset A'$  است. پس  $A' = B'$ قضیه ۵: اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه‌ی دلخواه از  $U$  مجموعه‌ی مرجع باشند، در این صورت:

$$U' = \emptyset \quad \text{الف) اگر } A = B \text{ آنگاه } A' = B'$$

$$\emptyset' = U \quad \text{ج) } (A')' = A$$

اثبات:

الف) در مسئله‌ی ۳۳ قسمت الف ثابت شده است.

ب) منظور از  $U'$  یعنی مجموعه‌ای که عضوهای آن در  $U$  نباشند. چون در اینجا  $U$  شامل تمام عضوهای

$$U' = \emptyset \quad \text{مورد بحث است. بنابراین در } U' \text{ عضوی قرار نمی‌گیرد. پس:}$$

ج) مجموعه‌ی  $(A')'$  بنابر تعریف مجموعه‌ی متمم (تعریف ۱۰)، مجموعه‌ای است که عضوهای آن متعلقبه  $M$  بوده و در  $A'$  نباشند. چون هر عضو  $U$  یا متعلق به  $A$  است یا متعلق به  $A'$ . پس عضوهایی که از  $U$ که در  $A'$  نباشند، به ناچار در  $A$  هستند. به صورت ریاضی می‌توان گفت:

$$(A')' = \{x | x \in U, x \notin A'\} = \{x | x \in U, x \in A\} = A$$

د) طبق قسمت الف) همین قضیه می‌دانیم که اگر دو مجموعه برابر باشند آنگاه متمم‌های آنها نیز برابر

است. همچنین طبق قسمت ب) داریم:

$$U' = \emptyset \Rightarrow (U')' = \emptyset' \Rightarrow U = \emptyset' \bullet$$

زیرا اگر به دو قسمت  $A - B$  نگاه کنیم می‌بینیم که این مجموعه قسمتی از مجموعه‌ی  $A$  است که در آن  $A \cap B$  وجود ندارد. می‌توان حالت شمارش در مجموعه را به حالت سه مجموعه گسترش داد. اگر  $A, B, C$  سه مجموعه در مجموعه‌ی مرجع  $U$  باشند آنگاه :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

قسمت مشترک بین سه مجموعه در طرف راست تساوی فوق ۳ بار محاسبه گشته و ۳ بار حذف شده است. پس باید یکبار آن را به سمت راست اضافه کنیم و فرمول به فرم فوق است.

• مثال ۲۴: در یک کلاس دانشگاهی، همه‌ی دانشجویان در سه زبان انگلیسی، آلمانی و فرانسه مهارت دارند. اگر ۲۵ نفر زبان انگلیسی و ۱۱ نفر زبان آلمانی و ۱۲ نفر زبان فرانسه می‌دانند. اگر ۶ نفر هر دو زبان انگلیسی و آلمانی، ۵ نفر هر دو زبان انگلیسی و فرانسه و ۳ نفر هر دو زبان آلمانی و فرانسه را بدانند و ۲ نفر هر سه زبان را مهارت داشته باشند. کلاس چند دانشجو دارد. نمودار ون کلاس را در نظر بگیرید.

✍ حل: مجموعه‌ی دانشجویانی که در انگلیسی مهارت دارند  $E$  و دانشجویانی که در آلمانی مهارت دارند  $G$  و دانشجویانی که در فرانسه مهارت دارند را با  $F$  نشان می‌دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} n(E \cup G \cup F) &= n(E) + n(G) + n(F) - n(E \cap G) \\ &\quad - n(E \cap F) - n(F \cap G) + n(E \cap F \cap G) \\ \Rightarrow n(E \cup G \cup F) &= 25 + 11 + 12 - 6 - 5 - 3 + 2 = 32 \end{aligned}$$

پس کلاس ۳۲ نفر عضو دارد. ■

• مثال ۲۵: اگر مجموعه‌ی  $A$  دارای ۹ عضو و مجموعه‌ی  $B$  دارای ۱۰ عضو و مجموعه‌ی  $C$  دارای ۸ عضو و  $A \cap B$  دارای ۳ عضو و  $A \cap C$  دارای ۲ عضو باشد و  $B \cap C = \emptyset$  باشد. آنگاه  $(A \cup B \cup C)$  چند عضو دارد؟

✍ حل: چون  $B \cap C = \emptyset$  است پس اشتراک سه مجموعه یعنی  $A \cap B \cap C$  نیز تهی است. پس  $n(A \cap B \cap C) = 0, n(B \cap C) = 0$  است. طبق فرمول‌های شمارش داریم:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 9 + 10 + 8 - 3 - 2 - 0 + 0 = 22 \end{aligned}$$

پس اجتماع سه مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  و  $C$  دارای ۲۲ عضو ۲ دارد.

### ی) قوانین جبر مجموعه :

برای اعمال اجتماع و اشتراک و تفاضل بین دو مجموعه قوانین زیر وجود دارند که آنها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

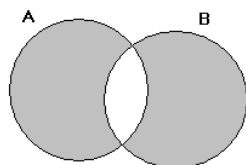
اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه زیر مجموعه از مجموعه  $U$  باشند. در این صورت قوانین زیر برقرار است.

- 1)  $\begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases}$  قانون های خودتوانی
- 2)  $\begin{cases} A \cup \emptyset = A \\ A \cap U = A \end{cases}$  قانون های همانی
- 3)  $\begin{cases} A \cup U = U \\ A \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$  قانون های غلبه
- 4)  $\begin{cases} A \cup A' = U \\ A \cap A' = \emptyset \end{cases}$  قانون های عکس
- 5)  $\begin{cases} (A \cap B) \subset A \\ (A \cap B) \subset B \end{cases} \begin{cases} A \subset (A \cup B) \\ B \subset (A \cup B) \end{cases}$
- 6)  $\begin{cases} A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \\ A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \end{cases}$
- 7)  $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$  قانون های جابه جایی
- 8)  $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$  قانون های شرکت پذیری
- 9)  $(A')' = A$  قانون های متمم مضاعف
- 10)  $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$  قانون های توزیع پذیری
- 11)  $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$  قانون های دمورگان
- 12)  $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$  قانون های جذب

عمل تفاضل متقارن:

تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  که آنرا با  $A \Delta B$  نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



مثال ۲۱: اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ،  $B = \{3, 4, 5\}$  مجموعه‌ی  $A \Delta B$  را مشخص کنید.

حل:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2\} \cup \{5\} = \{1, 2, 5\}$$

خواص تفاضل متقارن دو مجموعه:

- ۱)  $A \Delta A = \emptyset$
- ۲)  $A \Delta \emptyset = A$
- ۳)  $A \Delta M = \bar{A}$
- ۴)  $A \Delta \bar{A} = M$
- ۵)  $A \Delta B = B \Delta A$  خاصیت جابه‌جایی
- ۶)  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- ۷)  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$  خاصیت شرکت‌پذیری
- ۸)  $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

اثبات: طرفین تساوی  $A \Delta B = A \Delta C$  را از طرف چپ با  $A$  ترکیب می‌کنیم.

$$A \Delta (A \Delta B) = A \Delta (A \Delta C)$$

$$(A \Delta A) \Delta B = (A \Delta A) \Delta C \Rightarrow \emptyset \Delta B = \emptyset \Delta C \Rightarrow B = C$$