اعـــداد

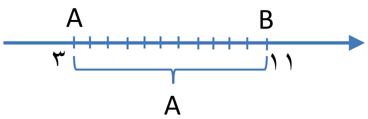
الف) اعداد طبیعی : اعداد صحیح

یکی از مفهوم اساسی ریاضی عدد است. به وسیله‌ی عدد میزان سود و زیان، تعداد افراد، مساحت اشـــکال، طــول قد، حجم اشیاء و . . . نشان داده می‌شود. بشر برای نمایش اعداد از روش‌های مختلفی بهره می‌برده است. در کتاب درسی چند شیوه بیان شده است که برای اطلاعات عمومی شما مفید است ولی در امتحانات از آنها سؤالی نخواهد آمد.

شمارش با اعداد طبیعی آغاز می‌شود. هر شمارشی با یک واحد آغاز می‌شود. بــرای نمــایش اعــداد طبیعــی روی محور اعداد با استفاده از یک واحد شروع از مبداء اعداد طبیعی نمایش داده می‌شوند. (مجموعه اعداد طبیعــی را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهند.)

- مثال ۱ : اگر A و B دو نقطه روی نیم خط مثبت (محوراعداد) باشند و A نظیر عدد ۳ و طول پاره‌خط AB برابــر ۸ باشد، B نظیر کدام عدد طبیعی است ؟

حل : همانطورکه روی محور مشخص شده است محلّ نقطه $B3 + 8 = 11$ است.



✓ اعداد صحیح : اعداد طبیعی، صفر و قرینه اعداد طبیعی را با هم اعداد صــحیح مــی‌نامنــد. (مجموعــه اعــداد صحیح را با Z نشان می‌دهند.)

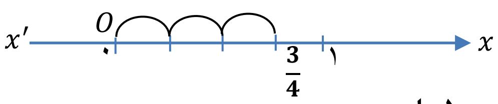
✓ اعداد حسابی : اعدادطبیعی و صفر را اعداد حسابی می‌گویند. (مجموعه اعداد حسابی را با W نشان می‌دهند .)

ب) اعداد گویا و اعشاری :

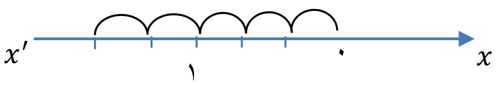
✓ عدد گویا : خارج قسمت تقسیم هر عدد صحیح بر یک عدد طبیعی را عدد گویا می‌نامند.

- مثال ۲ : هریک از اعداد $\frac{3}{4}$ و $\frac{-5}{2}$ را روی محور اعداد مشخص کنید :

حل : برای این کار به مخرج کسری که می‌خواهیم آن را روی محور نشان دهیم توجه می‌کنــیم. بــرای نشــان دادن $\frac{3}{4}$ روی محور هریک از واحدها به ۴ قسمت تقسیم کرده و ۳ واحد مثبت روی واحدهای جدید پیش می‌رویم.



به همین ترتیب برای $\frac{-5}{3}$ هریک از واحدها را به ۳ قسمت تقسیم کرده و ۵ واحد به سمت چپ می‌رویم.



توجه ۴ : اگر a و b دو عدد روی محور اعداد باشند که b سمت راست a باشد، b بزرگتر از a است.

<u>مقایسه دو کسر</u> : اگر دو کسر مخرج‌های مساوی داشته باشند کسری بزرگتر است که صورت آن بزرگتر باشد.

بنابراین برای مقایسه‌ی دو کسر باید آنها را هم مخرج کرد.

- مثال ۳ : دو کسر $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{7}$ را مقایسه کنید.

حل : صورت و مخرج کسر $\frac{4}{7}$ را در مخرج $\frac{3}{5}$ (یعنی ۵) ضرب می‌کنیم و صورت مخرج کسر $\frac{3}{5}$ را در مخرج کسر $\frac{4}{7}$ (یعنی ۷) ضرب می‌کنیم :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4}{7}\times\frac{5}{5}=\frac{20}{35}\\[2ex] \frac{3}{5}\times\frac{7}{7}=\frac{21}{35}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{20}{35}<\frac{21}{35}\Rightarrow\frac{4}{7}<\frac{3}{5}$$

توجه ۵ :

۱) اگر صورت و مخرج یک کسر را در عددی غیر صفر ضرب کنیم کسر تغییری نمی‌کند.

۲) از دو کسر که صورت‌های برابر دارند، کسری بزرگتر است که مخرج کوچکتری داشته باشد. (مثلاً $\frac{3}{5}<\frac{3}{7}$)

توجه ۶ : اگر $a<b<c$ آنگاه گوییم عدد b بین اعداد a و c است.

روش پیدا کردن n عدد گویا بین دو عدد گویا :

✓روش اول :

۱) ابتدا دو کسر را هم مخرج می‌کنیم.

۲) اگر بتوانیم به تعداد خواسته شده کسر هم مخرج با دو کسر بنویسیم که مسأله حل شده است.

۳) اگر نتوانیم به تعداد خواسته شده کسر هم مخرج با دو کسر بنویسیم صورت و مخرج کسرهای داده شده را در $n+1$ ضرب می‌کنیم. (n تعداد اعداد گویا بین دو کسر است)

- مثال ۶ : بین دو عدد $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{3}$ سه عدد گویا بنویسید.

حل :

۱) ابتدا دو کسر را هم مخرج می‌کنیم :

$$\frac{2\times 5}{3\times 5}=\frac{10}{15} \text{ و } \frac{3\times 3}{5\times 3}=\frac{9}{15}$$

۲) نمی‌توانیم بین ۹ و ۱۰ (صورت‌های دو کسر) عددی بنویسیم.

۳) صورت و مخرج هر دو کسر را در مورد ۴ ضرب می‌کنیم. ($3 + 1 = 4$)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{10}{15} \times \frac{4}{4} = \frac{40}{60} \\ \frac{9}{15} \times \frac{4}{4} = \frac{36}{60} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{36}{60} < \underbrace{\frac{37}{60} < \frac{38}{60} < \frac{39}{60}}_{\text{جواب های مسئله}} < \frac{40}{60}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده می کنیم}} \frac{3}{5} < \frac{36}{60} < \frac{19}{30} < \frac{13}{20} < \frac{2}{3}$$

✓**روش دوم :** اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر دلخواه ، آنگاه عدد $\frac{a+c}{b+d}$ بین آن دو عدد قرار دارد.

- مثال ۷ : یک عدد گویا بین $\frac{4}{3}$ و $\frac{5}{4}$ به دست آورید.

حل : عدد $\frac{9}{7} = \frac{5+4}{4+3}$ بین دو عدد $\frac{4}{3}$ و $\frac{5}{4}$ است.

✓**روش سوم :** اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد گویا دلخواه باشند به طوریکه $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$، آنگاه عدد $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$ بین آن دو عدد قرار دارد. در حقیقت میانگین هر دو عدد، بین آن دو عدد واقع است.

- مثال ۸ :یک عدد گویا بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ به دست آورید.

حل :

$$\frac{1}{4} < \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{2} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{\frac{7}{12}}{2} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{7}{24} < \frac{1}{3}$$

✓**روش چهارم :** اگر دو عدد گویا را به صورت اعشاری بنویسیم، به سادگی می‌توان عددی بین آن دو عدد بدست آورد.

- مثال ۹ :دو عدد گویا بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ به دست آورید.

حل :

$$\begin{array}{l} \frac{2}{5} = 0/4 \\ \frac{3}{4} = 0/75 \end{array} \Rightarrow \frac{2}{5} = 0/4 < 0/41 < 0/42 < 0/75 \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{4}{100} < \frac{42}{100} < \frac{3}{4}$$

توجه ۷ : بین هر دو عدد گویای متمایز بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد.

ج) اعداد اعشاری :

اعداد اعشاریی مختوم، اعداد اعشاری هستند که تعداد ارقام اعشاری آن (ارقام بعد از ممیز) محدود باشد.

✓جزء صحیح یک عدد اعشاری :

در یک عدد اعشاری مثبت، عدد حسابی قبل از ممیز را جزء صحیح آن و تفاضل جزء صحیح، از عدد اعشـــاری را جزء اعشاری عدد می‌نامند.

توجه ۸ : جزء صحیح یک عدد مانند a را با علامت [a] نشان می‌دهند.

● مثال ۱۰ :جزء صحیح و جزء اعشاری هریک از اعداد زیر را تعیین کنید.

۲۵/۷۰۸ و ۰/۱۹۱ و ۴۴/۲ و ۳۵

حل :

۲۵/۷۰۸	۰/۱۹۱	۴۴/۲	۳۵	عدد
۲۵	۰	۴۴	۳۵	جزء صحیح
۰/۷۰۸	۰/۱۹۱	۰/۲	۰	جزء اعشاری

توجه ۹ :

۱) صفرهای بعد از ممیز که بعد از آن رقمی وجود نداشته باشند، نوشته نمی‌شوند.

(مثلاً $35 = 35/00$ و $44/2 = 44/20$)

۲) برای تبدیل یک عدد اعشاری مختوم به کسر کافی است عدد بدون ممیز را در صورت نوشته و مخرج ده به توان تعداد ارقام بعد از ممیز قرار دهیم.

● مثال ۱۱ :هریک از اعداد اعشاری زیر را به صورت یک کسر گویا بنویسید که در مخــرج آن تــوانی از ده وجــود داشته باشد. ۲۵/۷۰۸ و ۰/۱۹۱ و ۴۴/۲ و ۳۵

حل :

$$35 = \frac{35}{10^0} \qquad 44/2 = \frac{442}{10^1}$$
$$0/191 = \frac{191}{10^3} \qquad 25/708 = \frac{25708}{10^3}$$

توجه ۱۰ :برای جمع و تفریق اعداد اعشاری آنها را طوری زیر هم می‌نویسیم که ممیز آنها زیر هم باشد و بعد به صورت معمولی آنها را جمع و تفریق می‌کنیم.

● مثال ۱۲ :جمع و تفریق زیر را انجام دهید :

$$\begin{array}{r} 34/254 \\ +\ 3/018 \\ \hline 37/272 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24/85 \\ -\ 7/68 \\ \hline 17/17 \end{array}$$

توجه ۱۱ :برای ضرب کردن دو عدد اعشاری آنها را بدون ممیز در نظر گرفته و ضرب می‌کنیم و برای حاصل ضرب به اندازه‌ی مجموع تعداد ارقام بعد از ممیز هر دو عدد، رقم اعشاری در نظر می‌گیریم.

● مثال ۱۳ :حاصل ضرب $2/8 \times 36/47$ را پیدا کنید.

حل :ابتدا دو عدد را بدون ممیز در نظر گرفته و ضرب می‌کنیم :

$$3647 \times 28 = 102116$$

اکنون برای حاصل ضرب سه رقم اعشاری در نظر می‌گیریم. (زیرا ۲/۸ یک رقم و ۳۶/۴۷ دو رقم اعشار دارد و $3 = 1 + 2$) پس :

$$36/47 \times 2/8 = 102/116$$

توجه ۱۲ :در تقسیم یک عدد اعشاری بر 10^n ، ممیز را n رقم به عقب و در ضرب یک عدد اعشاری در 10^n ، ممیز را n رقم به جلو حرکت می‌دهیم. $(n \in N)$

● مثال ۱۴ :حاصل عبارات زیر را به صورت عدد اعشاری بنویسید :

الف) $425/7691 \times 10^3 =$

ب) $425/7691 \div 10^2 =$

حل :

الف) $425/7691 \times 10^3 = 425769/1$

ب) $425/7691 \div 10^2 = 4/257691$

د) اعداد حقیقی :

با وجود اینکه بین هر دو عدد گویا یک عدد گویا وجود دارد ولی روی محور اعداد نقاطی وجود دارند که متناظر با هیچ عدد گویایی نیستند. این نقاط متناظر با اعداد گنگ هستند. اعداد گویا به همراه اعداد گنگ اعداد حقیقی را تشکیل می‌دهند.

توجه ۱۳ :

۱) اعداد رادیکالی که زیر رادیکال مربع کامل نباشد عدد گنگ محسوب می‌شوند. مانند :

$\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و $\cdots$

۲) بعضی از اعداد اعشاری مانند عدد π و $2/1234567891011\cdots$ نیز گنگ محسوب می‌شوند.

۳) به کمک مثلث‌های زیر و قرار دادن آنها به طور مناسب روی محور اعداد می‌توان نقاط مربوط به اعــداد شامل $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و ⋯ را پیدا کرد.

- مثال ۱۴ :نقاط مربوط به $2+\sqrt{2}$ و $-2+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد مشخص کنید.

حل :

- مثال ۱۵:نقاط مربوط به $2-\sqrt{5}$ و $-2\sqrt{3}$ را روی محور مشخص کنید.

حل :

آیا می‌توانید $-2-\sqrt{3}$ را به روش دیگری مشخص کنید ؟ (توجه کنید که $-2-\sqrt{3} = -(2+\sqrt{3})$)

✓**قــدر مطلق :** فاصله‌ی هر نقطه‌ی نظیر یک عدد حقیقی تا مبدأ ، قدر مطلق آن عدد حقیقی نامیده مــی‌شــود.

قدر مطلق یک عدد حقیقی مانند x با نماد $|x|$نشان داده می‌شود.

- مثال ۱۶ :قدر مطلق هریک از اعداد 3 و -2 و $-\frac{5}{2}$ و $\sqrt{5}$ را تعیین کنید.

حل : نقطه‌ی نظیر عدد 3 , A می‌نامیم با توجه به شکل طول پاره‌خط OA برابر ۳ است پس $|3| = 3$

به همین ترتیب برای سایر اعداد داریم :

$$\Rightarrow OB = 2 \Rightarrow |-2| = 2$$

$$\Rightarrow OC = \frac{5}{2} \Rightarrow \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow OD = \sqrt{5} \Rightarrow |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$$

توجه ۱۴ :برای تعیین قدر مطلق یک عدد ابتدا به علامت آن دقت می‌کنیم اگر مثبت باشد، خود آن عدد را می‌نویسیم ولی اگر منفی باشد، قرینه‌ی آن عدد را می‌نویسیم.

● مثال ۱۷:قدر مطلق هریک از اعداد $-\sqrt{5}$ و 5 و$\sqrt{2}-1$ و $1-\sqrt{2}$ را تعیین کنید.

حل :

$$|\underbrace{-\sqrt{۵}}_{-}| = -(-\sqrt{۵}) = \sqrt{۵}$$

$$|\underbrace{۵}_{+}| = ۵$$

$$|\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{-}| = -(۱-\sqrt{۲}) = \sqrt{۲}-۱$$

$$|\underbrace{\sqrt{۲}-۱}_{+}| = \sqrt{۲}-۱$$

هـ) تقریب‌های اعشاری اعداد حقیقی

می‌دانیم $\sqrt{3}$عددی گنگ است بنابراین نمی‌توانیم آن را به صورت یک عدد گویا نشان دهیم ولی می‌توانیم اعداد اعشاری نزدیک آن را پیدا کنیم مثلاً ۱/۷ به $\sqrt{3}$ نزدیکتر و ۱/۷۳۲ به $\sqrt{3}$ بیشتر نزدیک است. هریک از این اعداد اعشاری یک تقریب برای $\sqrt{3}$ است.

● مثال ۱۸:عدد π با دو رقم اعشار به صورت ۳/۱۴ تقریب زده می‌شود.

● مثال ۱۹ :عدد $\frac{3}{7}$را تا سه رقم اعشار محاسبه کنید.

حل :عدد ۳ را بر ۷ تقسیم و قسمت اعشار را تا سه رقم ادامه می‌دهیم در نتیجه : $\frac{3}{7} = 0/428$

و) نمادها و زبان ریاضی

در ریاضیات برای بیان مفاهیم از نمادها استفاده می‌کنند. مثلاً برای بیان اینکه عدد سه کوچکتر از عدد هفت است می‌نویسیم « $۷ > 3$ » و برای بیان اینکه : توان دوم عددی مانند a مثبت یا صفر است، می‌نویسیم « $a^2 \geq 0$ »

● مثال ۲۰ : در زیر چند ویژگی از اعداد حقیق به زبان فارسی نوشته شده است به کمک نمادها این جملات را بانویسی کنید.

الف) مجموع هر عدد با قرینه‌اش برابر صفر است ؟

ب) حاصلضرب هر عدد در صفر برابر صفر است ؟

ج) قرینه‌ی مجموع دو عدد برابر مجموع قرینه‌های آنهاست.

حل :

الف) $x + (-x) = 0$

ب) $x \times 0 = 0$

ج) $-(x + y) = (-x) + (-y)$

توجه ۱۵ :

۱- حاصلضرب هر عدد در خودش را مربع یا مجذور آن عدد گویند. (مثلاً مجذور ۲ برابر ۴ = ۲ × ۲ و مربع ۷ برابر ۴۹ = ۷ × ۷ است.)

۲- اولویت عملیات در حساب از چپ به راست به این صورت است :

۱) پرانتزها ۲) توان ۳) ضرب ۴) جمع

۳- بنابر تعریف تفاضل عدد b از عدد a برابر است با مجموع a با قرینه‌ی b پس تفریق با جمع تعریف می‌شود. به زبان ریاضی داریم : $a - b = a + (-b)$

همچنین تقسیم عدد a بر عدد غیر صفر b ضرب عدد a در معکوس عدد b تعریف می‌شود. به زبان ریاضی داریم : $a \div b = a \times \frac{1}{b} (b \neq 0)$

- مثال ۲۱:حاصل عبارت زیر را به دست آورید :

$$A = (-3 + 5)^2 - 4 \times 5 \div 2 + 6 \times (3 - 4)^3$$

حل :ابتدا حاصل داخل پرانتزها را به دست می‌آوریم : $A = 2^2 - 4 \times 5 \div 2 + 6 \times (-1)^3$

سپس توان‌ها را محاسبه می‌کنیم : $A = 4 - 4 \times 5 \div 2 + 6 \times (-1)$

اکنون نوبت ضرب و تقسیم است. $A = 4 - 10 - 6$

و در نهایت جمع و تفریق را انجام می‌دهیم $A = -12$

الف) اعداد طبیعی و اندازه‌گیری با اعداد طبیعی و اعداد صحیح :

۱-اگر A و B دو نقطه روی نیمخط مثبت باشند و A متناظر نقطه ۵ باشد و طول پاره‌خط AB برابر ۱۲ باشد، B متناظر با کدام عدد طبیعی است.

۲- نقطه A متناظر با عدد ۳ و نقطه‌ی A' متناظر با قرینه آن است، نقطه B متناظر با عدد ۴ و نقطه‌ی B' قرینه‌ی آن است.

الف) فاصله‌ی کدام نقاط تا مبدأ یکسان است.

ب) طول پاره‌خط AA' و BB' را بدست آورید.

۳-اگر A و B دو نقطه روی محور مختصات باشد و نقطه A متناظر با عدد ۴ باشد و طول پاره خط AB برابر ۱۴ باشد، B متناظر با کدام اعدد می‌تواند باشد ؟

۴- اگر فاصله نقاط متناظر با اعداد متمایز (-5) و $4m+1$ روی محور اعداد تا مبدأ مساوی باشد، مقدار m را بدست آورید.

۵- اگر مستطیل‌هایی که محیط آنها ۱۶ Cm و طول و عرض آنها بر حسب اعداد طبیعی است. طول و عرض مستطیل‌ها را بدست آورید. چند مستطیل رسم می‌شود ؟ مساحت هرکدام چقدر است ؟ کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟

ب) اعداد گویا و اعداد اعشاری

۶- به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) آیا مجموع هر دو عدد گویا، یک عدد گویاست ؟ تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت آنها چه طور ؟

ب) آیا مجموع هر دو عدد گنگ ، یک عددگنگ است ؟ تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت آنها چه طور ؟

۷- مقایسه کنید.

الف) $\frac{3}{7}\square\frac{4}{7}$ د) $\frac{4}{5}\square\frac{7}{9}$

ب) $\frac{13}{7}\square\frac{13}{8}$ هـ) $3\ \frac{2}{5}\square\frac{341}{100}$

ج) $\frac{3}{5}\square\frac{4}{7}$ ط) $\frac{10}{9}\square\frac{-111}{100}$

۸- به تعداد اعداد گویای خواسته شده بین دو اعداد گویای داده شده عددی گویا بنویسید.

الف) $\frac{5}{9}$ و $\frac{1}{3}$ (یک عدد گویا)

ب) $\frac{5}{9}$ و $\frac{4}{9}$ (چهار عدد گویا)

ج) $\frac{5}{7}$ و $\frac{5}{6}$ (سه عدد گویا)

۹- حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $4-4\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\times 2\right)$

ب) $\left[3\ \frac{1}{2}\ \div 2\ \frac{3}{4}-1\right]\times\left(\frac{3}{2}-2\right)\times\frac{1}{3}$

ج) $\left(\frac{1}{3}+\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)$

د) $\frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{6}}\times\frac{68}{5}$

پ) $(5/01\ \div\ 0/5)+\ 2/23$

ت) $(18\ \div 100)\ \times\ 1/5$

ث) $3/15\ \times\ 10^3-\ 2/15\ \times\ 10^2$

هـ) $3/2\ \times\ 10^3-\ 0/32\ \times\ 10^3$

و) $(0/001\ \div\ 0/05)+\ (2/95\ \times\ 2/1)$

۱۰- $\frac{2}{3}$ از $\frac{3}{5}$ راهی ۳۰ کیلومتر است، کل راه چقدر است ؟

۱۱- $\frac{2}{3}$ از $\frac{3}{5}$یک راه km ۱۵۰، چقدر است ؟

۱۲- از ۴۸ نفری که برای امتحان رانندگی ثبت نام کرده‌اند، $\frac{3}{4}$ قبول، $\frac{1}{6}$ مردود شده‌اند و بقیــه نتوانســتند در امتحان شرکت کنند. چند نفر در امتحان شرکت نکرده‌اند ؟

۱۳- اعداد زیر را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

الف) $9/911 \times 10^4$ و 99100 و 1×10^5 و 99×10^3

ب) $2\frac{2}{5}$ و $\frac{7}{3}$ و $1\frac{29}{29}$ و $\frac{23}{9}$ و $2\frac{7}{15}$

۱۴- عبارات زیر را بدون قدر مطلق بنویسید. ($\sqrt{10} \simeq 3/16$)

الف) $|-\pi| =$

ب) $|-\sqrt{10}| =$

ج) $|-1+\sqrt{2}| =$

د) $\left|-\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}\right| =$

هـ) $|\pi^2-10| =$

و) $\left|4\frac{2}{5}-\frac{14}{5}\right| =$

ز) $|\pi-3| =$

ح) $|\sqrt{2}-1-\sqrt{5}| =$

ط) $|\sqrt{5}-\sqrt{2}| =$

ی) $|\sqrt{3}-\pi+1| =$

ک) $|2-\sqrt{2}| + |3-\sqrt{2}| =$

ل) $|2-3\times(1-2)| =$

م) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}| - |1-\sqrt{3}-\sqrt{5}| =$

ن) $|3-\sqrt{3}| + |3-\sqrt{7}| =$

۱۵- حاصل عبارت‌های قدرمطلقی زیر را به ازای اعداد داده شده به دست آورید.

الف) $a = 4 \;,\; b = -3 \;\Rightarrow\; |a| + |b| + |ab| =$

ب) $a = -2 \;,\; b = 5 \;\Rightarrow\; |a - b|(|a| - |b|) =$

ج) $x = -4 \;,\; y = 2 \;\Rightarrow\; \big|x - y + |y|\big| + 5\big||x + y| - |-y|\big| =$

ج) اعداد حقیقی و تقریب‌های اعداد حقیقی

۱۶- کدامیک از اعداد زیر گنگ هستند.

الف) $\frac{2}{3}$ هـ) π ک) $\sqrt{3 \times 12}$

ب) $-\frac{1}{2}$) $0/230$ ل) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ج) $\sqrt{3}$ و) $-\sqrt{3} + 1$ ح) 0

د) $\sqrt{5} + 1$ ی) $\sqrt{4 + 9}$

۱۷- حاصل هریک از کسرهای مقابل را تا سه رقم اعشار بدست آورید.

الف) $\frac{2}{7}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{10}$

۱۸- کدامیک از اعداد $\frac{22}{7}$ و $\frac{156}{50}$ و $\frac{73}{20}$ به عدد π نزدیکتر است ؟

۱۹- نقاط متناظر با اعداد زیر را روی محور اعداد بیابید.

الف) $3-\sqrt{8}$ ج) $-2-\sqrt{10}$

ب) $\sqrt{8}+3$ د) $\sqrt{10}-2$

۲۰- حاصل عبارات زیر را به صورت تقریبی بنویسید.

الف) $2/1 \times 47/9 =$

ب) $\frac{\sqrt{24/7}\times 3/8}{1/9\times\sqrt{35}} =$

ج) $\frac{\sqrt{10}\times 6/25}{\sqrt{35}\times 3/1} =$

د) $\frac{6/5\times 7/2}{\sqrt{168}} =$

۲۱- جدول زیر را کامل کنید.

عدداعشاری	کسر	درصد
۰/۴۵		
۰/۶۴۵		
۰/۳	$\frac{1}{3}$	
	$\frac{4}{5}$	
		۷۵

۲۲- یک سنگ کوچک درون استخر آب می‌افتد و امواج ایجاد شده به صورت دایره‌ای بزرگ می شود. لحظه‌ای می‌رسد که شعاع یکی از دایره‌ها برابر Cm ۶ شده و لحظه‌ای بعد شعاع آن Cm ۰/۳ افزایش می‌یابد. مساحت موج دایره‌ای در طی این مدت چقدر افزایش می‌یابد.

د) نمادها و زبان ریاضی – ترتیب عملیات – فاکتورگیری

۲۳- با بیان ریاضی بنویسید :

الف) حاصلضرب دو هزار و دوهزارم در منفی یک صدم تقسیم بر ریشه ۵

ب) توان دوم هر عدد ضرب در خودش برابر مکعب آن است.

ج) حاصلضرب دو عدد مختلف العلامت عددی است منفی.

د) به ازای هر عدد حقیقی تفاضل آن از خودش برابر صفر است.

هـ) منفی هفت، به توان دو از صفر بزرگتر است.

ی) منفی ، هفت له توان دو ار صفر کوچکتر است.

م) در جمع دو عدد جمع اولی با عدد دومی برابر است با جمع دومی با عدد اولی

ن) حاصل جمع دو عدد مثبت عددی است مثبت

و) بازای هر عدد حقیقی قدر مطلق آن همواره بزرگتر یا مساوی با صفر است.

ر) اگر عددی مثبت باشد آنگاه مجموع آن عدد با معکوسش بزرگتر یا مساوی با دو است

ز) یک عدد صحیح وجود دارد که سه برابر توان دوم آن منهای ده برابر آن بعلاوه ۳ برابر صفر است.

۲۴- با بیان فارسی بنویسید :

الف) $a \times a^{-1} = 1$

ب) $|x| = |-x|$

ج) $x \leq |x|$

د) $-|x| \leq x$

هـ) $x \geq o \quad \leftrightarrow \quad |x| = x$

ی) $x < o \quad \leftrightarrow \quad |x| = -x$

م) $-(a+b)^2 < o$

و) $-a^2 < o$

ز) $(-\mathbf{a})^2 \geq o$

ژ) $|-\mathbf{x}| \geq x$

ل) $-a \times (-1) = a$

۲۵- به زبان ریاضی بنویسید.

الف) ضرب هر عدد در صفر برابر صفر است.

ب) مربع مجموع سه عدد برابر است با مجموع مربعات آنها به علاوه ۲ برابر مجموع حاصلضرب دو به دوی آنها.

ج) اگر ضرب دو عدد حقیقی صفر باشد، حداقل یکی از آنها صفر است.

د) مجموع مجذورات دو عدد حقیقی، نامنفی است.

هـ) اگر مجموع مربعات دو عدد را از مربع مجموع آنها کم کنیم، دو برابر حاصلضرب آنها بدست می‌اید.

۲۶- برای هریک از عبارات زیر یک مثال هندسی بیاورید.

الف) $a^2 + b^2 = c^2$

ب) $\frac{1}{2}\, ab$

ج) $4a$

د) $2a + b$

۲۷- عبارات زیر را فاکتورگیری کنید.

الف) $2ab^2 - b^2$

ب) $abc + bcd$

ج) $xy^2z - zx$

د) $a^2 - a$

هـ) $ax^2 + bcx^2 + dx$

و) $a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2$

۲۸- برای عبارت $a(m+n+p) = am + an + ap$ مثال هندسی بیاورید.

۲۹- حاصل هریک از عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $3 \times 4^2 + 8 - 6 \div 2 =$

ب) $4 \times 7 + 12 \div 2 \div 3 - 6 =$

ج) $4/2 + 3^2 \div 8/6 - 4/6 =$

د) $9^2 \times 14 \div 2 - 3^2 \times 4 \div 6 + 1$

✓مسائل تکمیلی

۳۰- بین دو عدد $\sqrt{۲}$, $\sqrt{۵}$ سه عدد گویا پیدا کنید.

۳۱ - بین دو کسر $\frac{3}{10}$ و $\frac{1}{2}$ پنج عدد گویا بدست آورید که مخرج همگی ۲۵ باشد.

۳۲- بین دو عدد ۱/۵ و ۱/۵۲سه عدد گویا بنویسید.

۳۳- بین عدد سه و دویست هزارم و سه و بیست هزارم یک عدد اعشاری پیدا کنید.

۳۴- چهار جمله اول اعداد صحیح نامنفی را بنویسید.

۳۵- n یک عدد است اگر آن را با ۱۳+ جمع کنیم سپس در عدد ۷ ضرب کنیم آن را بصورت ریاضی بنویسید.

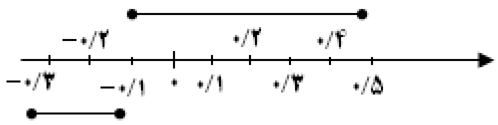
۳۶- حاصل $\left||x - 5| + 2x\right|$ در حالیکه $\substack{0 < x < ۵ \\ 1, 2, 3, 4}$ باشد را بدست آورید.

۳۷- آیا می‌توان گفت اعداد طبیعی و صحیح یک عدد اعشاری محسوب می‌شوند برای دلیل خود مثالی بزنید.

۳۸- نقاط متناظر با $3 + \sqrt{2}$, $\sqrt{5} - \sqrt{2}$, $\sqrt{2} - 3$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

۳۹- محیط و مساحت مستطیلی به ابعاد $\frac{13}{4}$ و $\frac{16}{26}$ را محاسبه کنید.

۴۰- طول پاره‌خط های متقابل را حساب کنید.



۴۱- محاسبات را بدون استفاده از ماشین حساب بطور تقریبی ذهنی انجام دهید.

الف) $5/9 \div 20/9 =$

ب) $73/4 \div 1/8 \times \frac{3}{5} =$

ج) $(24/3 + 2/35) \times 72/1 =$

هـ) $\frac{\sqrt{195} \times 3/92 \times \sqrt{1}}{\sqrt{17}}$

۴۲- محاسبه کنید.

$$2+3\left[3-8\times 5 — 1-2\times 3\right)\times (3-5)\times 2\div\left(-\frac{2}{3}\right)$$

۴۳- $a, b \in \mathbb{R}$ هستند :

الف) $ab > o$ درباره a, b چه می‌توان گفت :

ب) $\frac{a}{b} = o$ درباره a, b چه می‌توان گفت :

ج) $\frac{a}{b} = 1$ درباره a, b چه می‌توان گفت :

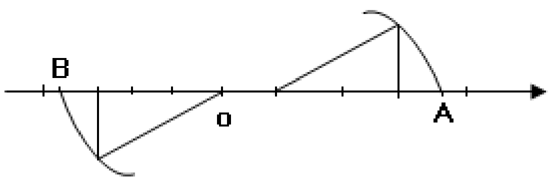
د) $a^2 < a$ درباره a چه می‌توان گفت :

۴۴- دو کسر $\frac{121}{97}$ و $\frac{143}{101}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

۴۵- حاصل را بیابید.

1) $3+2\times 5^2\div 4$ 2) $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\div 10\times\frac{3}{2}$

۴۶- طول AB را با توجه به شکل مقابل بدست آورید.



۴۷- حاصل را بیابید.

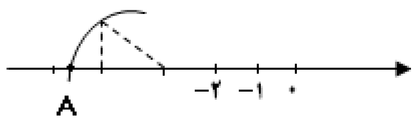
$$-\frac{3^2}{2}+\left(\frac{-3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3^2}{2}\right)$$

۴۸- اگر A و B دو نقطه روی محور اعداد به ترتیب $\sqrt{3}-5$, $\sqrt{3}-1-$ باشد طول پاره‌خط AB را بیابید.

۴۹- $\frac{2}{7}$ از $\frac{7}{5}$ مساحت مستطیلی به مساحت ۷۰۰ متر مربع را بصورت ریاضی بنویسید.

۵۰- کارگری $\frac{1}{3}$ کار خود را قبل از ظهر و $\frac{3}{4}$ از باقیمانده آن را بعد از ظهر به پایان می‌رساند چه کسری از کار باقی می‌ماند.

۵۱- روی محور اعداد نقطه A چه عددی را نشان می‌دهد.



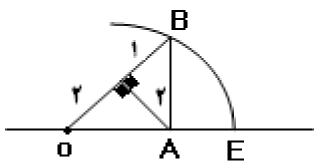
۵۲- محاسبه کنید :

الف) $(0/01 \div 0/5) + 2/23$

ب) $8/3 \times 10^3 - 7/31 \times 10^3$

ج) $(81 \div 100) \div 1/5$

۵۳- در شکل زیر به مرکز A و به شعاع AB یک کمان زده‌ایم تا محور را در نقطه E قطع کند، E چه عددی را نشان می‌دهد.



۵۴- کدامیک از دو عدد ۸۱/ و ۰/۸۷ به عدد $\frac{5}{6}$ نزدیکتر است.

۵۵- فاصله نقطه A تا مبدأ برابر عدد ۵ است نقطه A نظیر کدام عدد صحیح است.

۵۶- دو عدد اعشاری بین ۱/۸۱ و ۱/۸۲ بیابید.

۵۷- مستطیلی رسم کنید که طول و عرض آن عدد اعشاری باشد و مساحت آن ۳/۶ باشد ۴ مستطیل با این خاصیت رسم کنید.

۵۸- مقدار عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $|۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}|$

ب) $\big||۳-\sqrt{۱۰}|-|۴+\sqrt{۱۰}|\big|$

ج) $|۴-\sqrt{۷}|+|\sqrt{۷}-۳|-|۲\sqrt{۷}-۶|$

د) $|\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-۳|$

هـ) $|(-۱۳)^{۸۱}|$

ی) $|-۵x^{۲}|+|(-۳x)^{۲}|$

م) $|-۱-t^{۲}|-|۲t^{۲}+۳|$

و) $|\sqrt{۵}-۳|+|\sqrt{۵}-۲|+|-۲|$

۵۹- اگر $a=۷$, $b=-۳\,\frac{۱}{۲}$, $c=-۲\,\frac{۲}{۵}$ باشد حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{-|c||a^{۲}|}{۲\,|b|}-|a+b+c|$$

۶۰- در بین اعداد $\frac{1}{3}$ و $4/8$ و 8 و $5/36$ چند عدد اعشاری وجود دارد ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۱- لکه‌ی روغنی روی اب، دایره گونه بزرگ می‌شود. اگر شعاع لکه در ابتدا ۳ Cm بوده و سپس ۰/۲ Cm افزایش یابد، آنگاه مساحت لکه چقدر افزایش می‌یابد ؟

۱) ۰/۲ π ۲) ۱۶/۴ π ۳) ۱/۲۴ π ۴) ۰/۴ π

۶۲- تعداد مستطیل‌های متمایزی که محیط آنها ۱۸ Cm و اضلاع هریک از آنها برحسب Cm اعداد طبیعی هستند، کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۳- حاصل عبارت عبارت $A = 2\,|x+1| + |x| + |x-1| - 3$ به ازای مقادیر $-1 < x < ۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱-

۶۴- کدام عبارت درست است ؟

۱) بین هر دو عدد گنگ فقط یک عدد صحیح وجود دارد.

۲) بین هر دو عدد گویا فقط یک عدد گنگ وجود دارد.

۳) بین هر دو عدد گنگ بی‌شمار عدد صحیح وجود دارد.

۴) بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

۶۵- کدامیک از عبارت‌های زیر بیان صحیح عبارت «اگر $0 < a$, $0 < x$ و $a^2 = x^2$، آنگاه $a = x$» می‌باشد ؟

۱) اگر مجذور دو عدد با هم برابر باشند، جذر آن دو عدد نیز با هم برابرند.

۲) اگر مجذور دو عدد با هم برابر باشند، خود آن دو عدد نیز با هم برابرند.

۳) اگر دو عدد مثبت با هم برابر باشند، مجذور آن دو عدد نیز با هم برابر است.

۴) اگر مجذور دو عدد با هم برابر باشند، به شرطی خود آنها با هم برابرند که مثبت باشند.

۶۶- حاصل عبارت $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| + |-1 + \sqrt{3}|$ کدام است ؟

۱) $1 - \sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{5} - 1$ ۳) $1 + \sqrt{5}$ ۴) $-1 - \sqrt{5}$

۶۷- حاصل عددی $2 \times (5-3) \times \big((2 \times 3 - 1 -) - 5 \times 8 - 3\big)$ کدام است ؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۱۰- ۳) ۱۲۰- ۴) ۱۱۰

۶۸- کوچکترین کسر کدام است ؟

۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{6}{16}$

۶۹- با توجه به شکل زیر، y چه نوع عددی است ؟

۱) اصم ۲) گویا ۳) طبیعی ۴) اول

هـ) محتوی تکمیلی

$$15 = 3 \times 5$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$$
$$13 = 13$$

در این ملاحظه می‌شود که این تجزیه‌ها منحصربه فرد هستند و ممکن است یک عدد اول چند بار تکرار شود. که می‌توان آنها را به صورت توانی نوشت. برای به دست آوردن این تجزیه می‌توان از روش عمودی زیر استفاده کرد. ابتدا عدد را بر اولین عدد اول تقسیم می‌کنیم اگر بخش‌پذیر باشد مرحله را می‌نویسیم و اگر نباشد به سراغ عدد اول بعدی می‌رویم و تقسیم را بر آن عدد انجام می‌دهیم این کار را تا زمانی انجام می‌دهیم که به عدد ۱ برسیم.

- مثال ۲۲: تجزیه به عوامل اول عددهای ۲۴ و ۳۸۵ را به دست آورید.

حل :

$$\overbrace{\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & \end{array}}^{\div} \rightarrow \overbrace{\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & \end{array}}^{\div} \rightarrow \overbrace{\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & \end{array}}^{\div} \rightarrow \overbrace{\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array}}^{\div} \Rightarrow \overbrace{\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}}^{\div} \Rightarrow 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

عدد ۳۸۵ بر ۲ و ۳ بخش پذیر نیست لذا از عدد ۵ شروع می‌کنیم.

$$\overbrace{\begin{array}{r|l} 385 & 5 \\ 77 & \end{array}}^{\div} \rightarrow \overbrace{\begin{array}{r|l} 77 & 7 \\ 11 & \end{array}}^{\div} \rightarrow \overbrace{\begin{array}{r|l} 11 & 11 \\ 1 & \end{array}}^{\div} \Rightarrow \overbrace{\begin{array}{r|l} 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}}^{\div} \Rightarrow 385 = 5 \times 7 \times 11$$

تعریف۱۲ :عدد طبیعی n را مجذور کامل (مربع کامل) می‌گوییم. هرگاه پس از تجزیه آن به عوامل اول تمام توان‌ها اعداد اول زوج باشد.

● مثال ۲۳:آیا اعداد ۱۰۰ و ۳۱۵ و ۷۰۵۶ مربع کامل هستند ؟

حل :این اعداد را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم. داریم :

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2 \rightarrow \text{مربع کامل است } 100$$

$$315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 3^2 \times 5 \times 7 \rightarrow \text{مربع کامل نیست } 315$$

$$7056 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2 \rightarrow \text{مربع کامل است } 7056 \quad \blacksquare$$

● مثال ۲۴ : کوچکترین عدد طبیعی که در عدد ۱۵۰۰ ضرب شود و آن را به مربع کامل تبدیل کند چه عددی است ؟

حل : ابتدا عدد ۱۵۰۰ را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} 1500 & 2 \\ 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow a = 1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$$

چون توان‌های اعداد ۳ و ۵ فرد هستند پس عدد باید در یک عامل ۳ و یک عامل ۵ ضرب شود. یعنی :

$$3 \times 5 \times a = 2^2 \times 3^2 \times 5^4 \Rightarrow 15\,a \text{ مربع کامل}$$

پس عدد ۱۵۰۰ باید در ۱۵ ضرب شود. ■

تعریف۱۳ : عدد طبیعی را مکعب کامل می‌گویند هرگاه در تجزیه آن به حاصلضرب عامل‌های اول تمام توان‌ها مضرب ۳ باشد.

● مثال ۲۴ :کوچکترین عدد طبیعی که در عدد $A = 6^2 \times 3 \times 5^2$ ضرب شود و آن را به مکعب کامل تبدیل کند، چیست ؟

حل :می‌دانیم که عدد ۶ عدد اول نیست پس تجزیه A به عوامل اول کامل نیست. ابتدا تجزیه را کامل می‌کنیم.

$$A = (2 \times 3)^2 \times 3 \times 5^2 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$$

که مشاهده می‌شود توان ۲ و ۵ مضرب ۳ نیستند. لذا عدد A باید در ۲ و ۵ ضرب شود.

$$2 \times 5 \times A = 10\,A = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 = 30^3 \rightarrow \text{مکعب کامل} \ \blacksquare$$

تعریف۱۴ :بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب . م . م)

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که آن را با نماد $(a\,,b)$ نشان می‌دهیم به عدد طبیعی گفته می شود که بزرگترین عددی است که a و b برآن بخش‌پذیر هستند.

و) محاسبه (ب . م . م) دو عدد به کمک تجزیه

در این روش ابتدا اعداد را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم. پس عامل‌هـای مشـترک را بـا کمتـریم تـوان انتخـاب می‌کنیم. حاصلضرب این عامل ها عدد (ب . م . م) است. اگر در تجزیه اعداد عامل مشترکی وجود نداشته باشـد. (ب . م . م) اعداد یک است.

- مثال ۲۵ :ب . م . م . دو عدد ۷۹۲ و ۱۲۰۰ را محاسبه کنید.

حل :ابتدا دو عدد را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l|l} 1200 & 2 \; 792 & 2 \\ 600 & 2 \; 396 & 2 \\ 300 & 2 \; 198 & 2 \\ 150 & 2 \;\; 99 & 3 \\ 75 & 3 \;\; 33 & 3 \\ 25 & 5 \;\; 11 & 11 \\ 5 & 5 \;\;\; 1 & \\ 1 & & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \\ 792 = 2^3 \times 3^2 \times 11 \end{cases}$$

برای تعیین (ب . م . م) عامل مشترک را با کمترین توان در نظر می‌گیریم.

$$(1200 \; , \; 792) = 2^3 \times 3^1 = 24 \quad \blacksquare$$

تعریف۱۵ :کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک . م . م) :

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b کـه آن را بـا نمـاد $[a , b]$ نشـان مـی‌دهـیم، در واقـع کوچکترین عدد طبیعی است که بر دو عدد a و b بخش‌پذیر است.

ط) محاسبه‌ی (ک . م . م) دو عدد به کمک تجزیه

در این روش ابتدا دو عدد را به حاصلضرب عوامل تجزیه می‌کنیم پس برای به دست آوردن (ک . م . م) عامل‌های مشترک و غیرمشترک را با بزرگترین توان در نظر گرفته و در هم ضرب می‌کنیم . عدد حاصـل برابـر (ک . م . م) دو عدد است.

- مثال ۲۶ :(ک . م . م) دو عدد ۴۵ و۱۰۵ را به دست آورید.

حل :ابتدا دو عدد را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l|l} 105 & 3 \; 45 & 3 \\ 35 & 5 \; 15 & 3 \\ 7 & 7 \;\;\; 5 & 5 \\ 1 & \;\;\;\; 1 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 105 = 3 \times 5 \times 7 \\ 45 = 3^2 \times 5 \end{cases}$$

پس (ک . م . م) آنها برابر حاصلضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان است.

$$(105 \; , \quad 45) = 3^2 \times 5 \times 7 = 315 \quad \blacksquare$$

نکته ۸ : برای تعیین (ب . م . م) و (ک . م . م) سه عدد به مانند حالت دو عدد عمل می‌کنیم یعنی ابتدا سه عدد را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم پس (ب . م . م) یا (ک . م . م) آنها را با قواعد گفته شده به دست می‌آوریم.

- **مثال ۲۷ :(ب . م . م) و (ک . م . م) سه عدد ۲۴۴۰ و ۲۰۰۸ و ۲۱۰۰۰ را محاسبه کنید.**

حل :ابتدا اعداد را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 2440 &= 2^3 \times 3 \times 5 \times 37 \\ 2008 &= 2^3 \times 251 \\ 21000 &= 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 7 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \left(2440 \text{ و } 2008 \text{ و } 21000\right) &= 2^3 \\ \left[2440 \text{ و } 2008 \text{ و } 21000\right] &= 2^3 \times 3 \times 5 \times 37 \times 251 \end{aligned}$$

تعریف ۱۶ :دو عدد صحیح a و b را نسبت به هم اول گویند هرگاه (ب . م . م) آنها برابر با ۱ باشد به عنوان

مثال : $(13,19) = 1 \quad (25,26) = 1 \quad (16,9) = 1$

برای اینکه دو عدد نسبت به هم اول باشند. لزومی ندارد که دو عدد اول باشند.

نکته ۹ :

الف) هر دو عدد اول نسبت به هم اول هستند.

ب) هر دو عدد طبیعی متوالی (همچنین صحیح) نسبت به هم اول هستند.

ج) اگر a و b دو عدد نسبت به هم اول باشند و m و n دو عدد طبیعی باشند آنگاه a^m و b^n نیز نسبت به هم اول هستند.

نکته ۱۰ : اگر a و b مفروض باشد و عدد طبیعی d (ب . م . م) آنها باشد آنگاه دیگر مقسوم علیه‌های مشترک دو عدد a و b ، مقسوم علیه عدد d نیز هستند.

حال به بیان یک قضیه بدون اثبات آن می‌پردازیم.

قضیه ۳ : اگر b , a دو عدد طبیعی باشند. به طوریکه $(a\ ,\ b)$ (ب . م . م) و $[a\ ,b]$ ، ک . م . م) آنها باشند. آنگاه :

$$[a\ ,b] \times (a\ ,\ b) = a \times b$$

دوباره به مفهوم عدد می‌پردازیم. نخستین کمیت‌هایی که بشر اندازه می‌گرفت، عبارت از کمیت‌های هندسی بود، مانند طول ، سطح زیر کشت ، فاصله بین دو درخت . بنابراین ، در به وجود آمدن عددهای کسری، تأثیر هندسه در حساب کردن دیده می شود. این تأثیر، باعث به وجود آمدن مفهومی مهم و تازه یعنی کسرها و گسترش مفهوم عدد، از اعداد صحیح به اعداد کسری شد.

اعداد کسری از تقسیم عددهای درست به وجود نیامد و نمی‌توانست به وجود اید. زیرا با اعداد صحیح چیزهای درست را می‌شمارند. جمله‌هایی مانند سه عدد سیب، یک تیروکمان دو شمشیر همه قابل فهم هستند، ولی دو سوم یک آدم یا یک ششم یک تیر کمان قابل فهم نیست زیرا با شش تا « یک ششم » یک تیرکمان نمی‌توان شکار کرد. بلکه برای این کار یک تیرکمان درست لازم است.

مفهوم عدد از روی نسبت پاره‌خط‌ها به دست می‌آمد. یعنی وقتی شما می‌گویید عدد ۳ یعنی اندازه یک پاره‌خط که سه برابر طول پاره‌خط واحد است.

در ابتدا مردم به این فکر نمی‌افتادند که طول پاره‌خط‌ها ا می‌توان با کسرها بیان کرد. زیرا آنها معمولاً در ضمن اندازه‌گیری یا تقسیم از قسمت‌های کوچک صرف‌نظر می‌کردند. ولی با مرور زمان و نظریه دموکریت مبنی بر اینکه تمام طبیعت از اتم‌ها تشکیل شده است، مقدارهای جزئی نیز اهمیت پیدا کرد. هم چنین کشف قضیه تالس به این موضوع اندازه‌ی پاره‌خط‌ها را می‌توان با کسر بیان کرد کمک کرد.

- مثال ۲۸:با استفاده از قضیه تالس و با پرگار خط کش نامدرج (خط کشی که فقط خط رسم می‌کند) عدد $\frac{3}{5}$ را برروی محور تعیین کنید.

حل :ابتدا محور را رسم کرده و روی آن واحدی باپرگار انتخاب می‌کنیم. پس با خط کش از O خطی دلخواه که با محور موازی نباشد رسم می‌کنیم و بر روی آن واحدهای دلخواهی انتخاب می‌کنیم عدد ۵ و ۳ را بر روی خط جدید انتخاب کرده و عدد ۵ را به عدد ۱ روی محور وصل می‌کنیم. از نقطه‌ی ۳ با استفاده از پرگار و خط کش خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا محور را در M قطع کند. مقدار طول M طبق قضیه تالس $\frac{3}{5}$است. (چرا ؟)

حال با گسترش اعداد به مجموعه‌ی اعداد کسری می‌رسیم.

ظ) محتوای تکمیلی (کسر مسلسل):

تعریف ۱۷ :عبارتی به صورت $a_1 + \cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{a_4+\cdots}}}$ را که در آن $a_1, a_2, a_3, \cdots, b_1, b_2, b_3, \cdots$ اعداد حقیقی هستندو تعداد جمله‌ها می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد را کسر مسلسل می‌نامند اگر تعداد جمله‌ها محدود باشد کسر را مسلسل متناهی و اگر تعداد جمله‌ها نامحدود باشد آن کسر را مسلسل نامتناهی می‌نامیم.

یک عدد گویا کسری به صورت $\frac{P}{q}$ است که در آن q , P عددهای صحیح هستند و $q \neq 0$ می‌توان ثابت کرد که :

« هر عدد گویا را می‌توان به صورت یک کسر مسلسل ساده‌ی متناهی نوشت. »

- مثال ۲۹: عدد گویای $\frac{۶۷}{۲۹}$ را به صورت کسرهای مسلسل بنویسید.

حل :می‌توان کسر را به صورت‌های زیر تفکیک کرد.

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{9}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} \blacksquare$$

ل) طرز بدست آوردن تعداد مقسوم علیه‌های یک عدد

عدد ۲۴ را در نظر بگیرید. در تجزیه به عوامل اول عدد به صورت $24 = 2^3 \times 3$ نوشته می‌شود اگر مقسوم علیه‌های مثبت ۲۴ را در نظر بگیرید داریم :

$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} =$ مقسوم علیه‌های مثبت ۲۴

حال می‌توان این هشت مقسوم علیه را با حالت در نظر گرفتن برای توان‌های عوامل اول بدست آورد.

$$3 = 2^0 \times 3^1 \qquad 1 = 2^0 \times 3^0$$
$$6 = 2^1 \times 3^1 \qquad 2 = 2^1 \times 3^0$$
$$12 = 2^2 \times 3^4 \qquad 4 = 2^2 \times 3^0$$
$$24 = 2^2 \times 3^1 \qquad 8 = 2^3 \times 3^0$$

همانطور که واضح است توان‌های عامل ۲ از صفر تا سه و توان‌ها عامل ۳ از صفر تا یک قابل تغییرات. پس می‌توان حالت زیر را برای هر عدد دلخواه در نظر گرفت.

اگر n یک عدد مرکب باشد و تجزیه به عوامل آن به صورت :

$$n = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \cdots \times P_k^{\alpha_k}$$

باشد در آن صورت تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن از رابطه‌ی :

$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_k + 1) =$ مقسوم علیه‌های مثبت ۶

به دست می‌آید. به عنوان مثال :

$$24 = 2^3 \times 3^1$$

$(3+1)(1+1) = 4 \times 2 = 8 =$ تعداد مقسوم علیه‌های مثبت ۴

$2\,(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_k + 1) \blacksquare =$ تعداد کل مقسوم علیه‌های n