اعداد اعشاری مختوم

برخی از اعداد اعشاری دارای تعداد رقم‌های محدودی هستند (یعنی ارقام اعشاری آن‌ها جایی تمام می‌شود). به این اعداد اعشاری، اعداد اعشاری مختوم می‌گویند. مانند:

$۹/۴۷۶۵۳۷۸۹۱۰ \quad , \quad ۰/۷ \quad , \quad ۲/۴۵$

همهٔ اعداد اعشاری مختوم، برابر با یک کسر هستند. یعنی می‌توان کسری نوشت که اگر صورت آن را بر مخرجش تقسیم کنیم، حاصل تقسیم برابر با عدد اعشاری موردنظر ما باشد. به این کسر، کسر مولد می‌گویند. مانند:

$$۹/۴۶۷۵۳۷۸۹۱۰ = \frac{۹۴۶۷۵۳۷۸۹۱۰}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰} \quad , \quad ۰/۷ = \frac{۷}{۱۰} \quad , \quad ۲/۴۵ = \frac{۲۴۵}{۱۰۰}$$

نکته

۱) اگر کسری داشته باشیم که پس از ساده شدن، مخرج آن را تجزیه کنیم و در مخرج فقط عامل ۲ یا ۵ یا هر دو وجود داشته باشد، چنانچه صورت کسر را بر مخرج تقسیم کنیم، عدد اعشاری مختوم به‌دست می آید. مانند:

$$\frac{۵۳۲}{۱۰۰} \xRightarrow{۱۰۰=۲^۲\times۵^۲} ۵/۳۲ \quad , \quad \frac{۲۵}{۴} \xRightarrow{۴=۲\times۲} \frac{۲۵}{۴} = ۶/۲۵$$

$$\frac{۱۶۱}{۵۶} = \frac{۲۳}{۸} \xRightarrow{۸=۲^۳} \frac{۲۳}{۸} = ۲/۸۷۵ \quad , \quad \frac{۳۹}{۷۵} = \frac{۱۳}{۲۵} \xRightarrow{۲۵=۵^۲} \frac{۱۳}{۲۵} = ۰/۵۲$$

۲) قبلاً گفتیم که اعداد گویا، به اعدادی گفته می‌شود که می‌توانیم آن را به‌صورت یک کسر که صورت و مخرج آن‌ها اعداد صحیح هستند (مخرج صفر نباشد) نشان دهیم. بنابراین اعداد اعشاری مختوم، اعداد گویا هستند، چون می‌توانیم آن‌ها را به صورت کسر بنویسیم. مانند:

$$۰/۰۴۷ = \frac{۴۷}{۱۰۰۰} \quad , \quad ۲/۱۲۵ = \frac{۲۱۲۵}{۱۰۰۰} = \frac{۴۲۵}{۲۰۰} = \frac{۸۵}{۴۰} = \frac{۱۷}{۸}$$

اعداد اعشاری متناوب ساده

به اعداد اعشاری زیر، دقت کنید.

$$5/777777\cdots \quad , \quad 0/333333\cdots \quad , \quad 0/2424242424\cdots$$

مشاهده می‌کنید که ارقام اعشاری این اعداد، پایان‌ناپذیر است، ولی یک عدد در سمت راست ممیز، به‌طور مداوم تکرار می‌شود. به این اعداد اعشاری، متناوب ساده می‌گویند.

نمایش اعداد اعشاری متناوب ساده

از آنجا که نمی‌توانیم همهٔ ارقام اعشاری اعداد متناوب ساده را بنویسیم، فقط یک بار اعداد تکرار شونده را می‌نویسیم و بالای آن یک خط می‌کشیم.

$$5/777777\cdots = 5/\overline{7} \quad , \quad 0/333333\cdots = 0/\overline{3} \quad , \quad 0/2424242424 = 3/\overline{24}$$

دورهٔ تناوب

به تعداد ارقام اعشاری که تکرار می‌شوند، دورهٔ تناوب عدد اعشاری متناوب می‌گویند.

دورهٔ تناوب سه‌رقمی $4/\overline{123}$ ، دورهٔ تناوب دورقمی $\Leftarrow 5/\overline{42}$ ، دورهٔ تناوب یک‌رقمی $\Leftarrow 0/\overline{3}$

کسرهای مولد اعداد اعشاری متناوب ساده

در برخی از کسرها، وقتی صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم، عدد اعشاری متناوب ساده تولید می‌شود. این کسرها را مولد اعداد اعشاری متناوب ساده می‌گوییم.

$$\frac{5}{9} = 0/5555\cdots = 0/\overline{5} \quad , \quad \frac{41}{33} = 1/242424\cdots = 1/\overline{24} \quad , \quad \frac{12}{7} = 1/714285714285\cdots = 1/\overline{714285}$$

همانطور که می‌بینید، اعداد اعشاری متناوب ساده را می‌توان به‌صورت کسر نشان داد. پس این اعداد هم، گویا هستند (در درسنامهٔ تیزهوشانی، توضیح داده‌ایم که چگونه از روی عدد اعشاری متناوب ساده، کسر مولد آن را بنویسیم).

نکته

اگر کسری را کاملاً ساده کنیم و مخرج آن را تجزیه کنیم، چنانچه در مخرج کسر عامل ۲ و ۵ وجود نداشته باشد، آن کسر، مولد عدد اعشاری متناوب ساده است. در مثال‌های زیر مشاهده می‌کنید بعد از ساده کردن کسر، مخرج‌ها را تجزیه کرده‌ایم اما در هیچ‌کدام ۲ و ۵ وجود نداشته است.

$$\frac{10}{18} = \frac{5}{9} \xRightarrow[9=3^2]{} 0/\overline{5} \quad , \quad \frac{123}{99} = \frac{41}{33} \xRightarrow[33=3\times 11]{} 1/\overline{24} \quad , \quad \frac{20}{3} \xRightarrow[3]{} 6/\overline{6}$$

اعداد اعشاری متناوب مرکب

به اعداد اعشاری روبه‌رو دقت کنید.

$$3/16666\cdots \quad , \quad 0/9454545\cdots \quad , \quad 0/404761907619076190\cdots$$

در این اعداد اعشاری، ارقام اعشاری تمام نمی‌شوند. بعد از ممیز ابتدا یک یا چند رقم آمده‌اند و سپس ارقام تکرار شونده ظاهر می‌شوند. (یعنی ارقام تکرار شونده بلافاصله بعد از ممیز نمی‌آیند) به این اعداد، اعشاری متناوب مرکب می‌گویند. در اینجا هم برای راحتی کار، روی ارقام تکرار شونده خط می‌کشیم (روی سایر ارقام اعشاری که تکرار نمی‌شوند، خط نمی‌کشیم).

$$\underset{\text{(دورهٔ تناوب یک‌رقمی)}}{3/16666\cdots = 3/1\overline{6}} \quad , \quad \underset{\text{(دورهٔ تناوب دورقمی)}}{0/945454545 = 0/9\overline{45}} \quad , \quad \underset{\text{(دورهٔ تناوب پنج‌رقمی)}}{0/404761907619076190\cdots = 0/404\overline{76190}}$$

کسر مولد اعداد اعشاری مرکب

مانند اعداد اعشاری مختوم و اعداد اعشاری متناوب ساده، برای اعداد اعشاری متناوب مرکب هم می‌توان کسر مولد ساخت، یعنی کسری پیدا کرد که اگر صورتش را بر مخرجش تقسیم کنیم، یک عدد اعشاری متناوب مرکب تولید می‌شود.

$$\frac{۱۹}{۶}=۳/۱\overline{۶} \quad , \quad \frac{۵۲}{۵۵}=۰/۹\overline{۴۵} \quad , \quad \frac{۵۹}{۴۲}=۱/۴۰\overline{۴۷۶۱۹۰}$$

نکته

اگر پس از ساده کردن یک کسر، مخرج آن را تجزیه کنیم و در تجزیهٔ آن به‌غیر از ۲ و ۵، اعداد اوّل دیگری هم پیدا شود، آن کسر، عدد اعشاری متناوب مرکب تولید می‌کند.

$$\frac{۳۸}{۱۲}=\frac{۱۹}{۶}\xRightarrow[۶=۲\times۳]{}=۳/۱\overline{۶} \quad , \quad \frac{۱۰۴}{۱۱۰}=\frac{۵۲}{۵۵}\xRightarrow[۵۵=۵\times۱۱]{}=۰/۹\overline{۴۵} \quad , \quad \frac{۵۹}{۴۲}\xRightarrow[۴۲=۲\times۳\times۷]{}=۱/۴۰\overline{۴۷۶۱۹۰}$$

درکسرهای بالا، مشاهده می‌کنید مخرج‌ها را تجزیه کرده‌ایم و در تجزیهٔ آن‌ها به‌غیر از ۲ و ۵، عددهای اوّل دیگری هم ظاهر شده است.

نکته

اعداد اعشاری متناوب مرکب هم، جزو اعداد گویا هستند، زیرا می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت کسر بنویسیم.

مثال ۱۳ بدون تقسیم صورت بر مخرج، بگویید هر کسر، چه نوع عدد اعشاری تولید می‌کند؟

ابتدا هر کسر را ساده می‌کنیم و سپس مخرج آن را تجزیه می‌کنیم:

الف) $\frac{۲۷۳}{۳۰۰}=\frac{۹۱}{۱۰۰}\xRightarrow[۱۰۰=۲^۲\times۵^۲]{}$ اعشاری مختوم

ب) $\frac{۲۰۵}{۱۶۵}=\frac{۴۱}{۳۳}\xRightarrow[۳۳=۳\times۱۱]{}$ متناوب ساده

ج) $\frac{۶۵}{۶۸}\xRightarrow[۶۸=۲^۲\times۱۷]{}$ متناوب مرکب

در مخرج کسر (الف)، فقط عامل ۲ و ۵ داریم، پس این کسر، مولد عدد اعشاری مختوم است. در مخرج کسر (ب)، فقط عامل ۳ و ۱۱ داریم (۲ و ۵ وجود ندارد)، پس این کسر، مولد عدد اعشاری متناوب ساده است. در مخرج کسر (ج)، به‌غیر از ۲، عامل ۱۷ هم وجود دارد، پس این کسر، مولد عدد اعشاری متناوب مرکب است.

نتیجه: تا اینجای کار متوجه شدیم که چهار دسته از اعداد، گویا هستند.

۱- اعداد صحیح
۲- اعداد اعشاری مختوم
۳- اعداد اعشاری متناوب ساده
۴- اعداد اعشاری متناوب مرکب

اعداد گنگ

به عدد اعشاری مقابل دقت کنید. $۷/۴۵۳۳۰۶۲۰۱۶۲۵۳۹۷۴۳۲۱...$

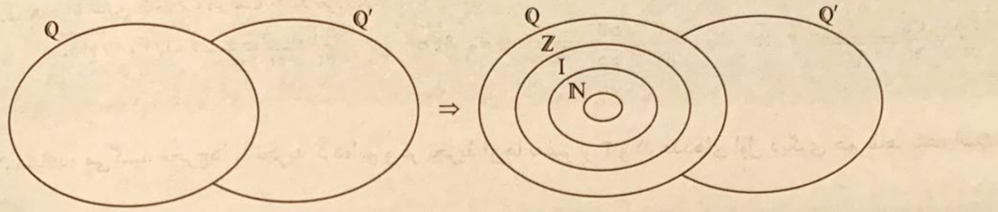
مشاهده می‌کنید که ارقام اعشاری آن تمام نمی‌شوند (مختوم نیست)، از طرفی ارقام اعشاری آن تکرار نمی‌شوند پس متناوب نیست. این اعداد گویا نیستند، زیرا نمی‌توانیم آن‌ها را به‌صورت کسر نشان دهیم. به این اعداد، اعداد گنگ یا اَصَم گفته می‌شود.

مجموعهٔ اعداد گنگ: هر عددی را که نتوان به‌صورت یک کسر نشان داد، به آن عدد گنگ یا اصم گفته می‌شود. مجموعهٔ اعداد گنگ را به‌صورت Q' یا Q^c نشان می‌دهند.

نمودار وِن Q و 'Q

باتوجه به آنچه که تاکنون آموختیم، متوجه شدیم که مجموعه‌های اعداد صحیح، حسابی و طبیعی، همگی زیرمجموعهٔ اعداد گویا هستند، زیرا همهٔ اعضای آن‌ها جزو اعداد گویا حساب می‌شوند. پس نمودار وِن مربوط به اعداد گویا، به‌صورت روبه‌رو خواهد بود.

از طرفی می‌دانیم اعداد یا گنگ هستند یا گویا، یعنی این دو مجموعه، هیچ عضو مشترکی ندارند و نمی‌توان عددی پیدا کرد که هم عضو Q باشد و هم عضو 'Q. اشتراک این دو مجموعه، تهی است ($Q \cap Q' = \varnothing$). پس در نمودار وِن، این دو مجموعه، هیچ قسمت مشترکی ندارند.



همچنین اشتراک مجموعهٔ اعداد گنگ با هر کدام از مجموعه‌های $\mathbb{Z}$، I و $\mathbb{N}$ هم تهی است، زیرا هیچ‌کدام از اعداد طبیعی، حسابی و صحیح، گنگ نیستند.

$Q' \cap \mathbb{N} = \varnothing$, $Q' \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, $Q' \cap I = \varnothing$

مثال ۱۴ **درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.**

الف) $Q' - \mathbb{Z} = \varnothing$ ✗

چون 'Q و $\mathbb{Z}$ هیچ عضو مشترکی ندارند، بنابراین در $Q' - \mathbb{Z}$ که باید عضوهای مشترک را از 'Q کم کنیم، هیچ عضوی از 'Q کم نمی‌شود و حاصل برابر با خود 'Q می‌شود. پس این عبارت اشتباه است.

ب) $Q \cap Q' = \mathbb{N} - \mathbb{Z}$ ✓

می‌دانیم $Q \cap Q'$ برابر با $\varnothing$ است. از طرفی از آنجا که $\mathbb{N}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{Z}$ است، پس اشتراک $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ برابر با خود $\mathbb{N}$ است و در $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$ که باید اعضای مشترک را از $\mathbb{N}$ کم کنیم (کلّ $\mathbb{N}$ از $\mathbb{N}$ کم می‌شود). بنابراین $\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \varnothing$ است، یعنی این تساوی صحیح است.

ج) $Q - \mathbb{N} = \mathbb{Z} - I$ ✗

می‌دانیم $\mathbb{Z} - I$ برابر با تمامی اعداد صحیح به‌غیر از تمامی اعداد صحیح مثبت و صفر است. هم‌چنین $Q - \mathbb{N}$ برابر با تمامی اعداد گویا به‌غیر از اعداد صحیح مثبت است. بنابراین این دو مجموعه باهم برابر نیستند:

$Q - \mathbb{N} \neq \mathbb{Z} - I$

مهم‌ترین اعداد گنگ: برخی از اعداد گنگ بسیار معروف و پرکاربرد هستند. در اینجا دو دستهٔ آن‌ها را معرفی می‌کنیم. (در سال‌های بعد با برخی دیگر از آن‌ها آشنا می‌شوید).

الف) عدد π: عدد پی که در محاسبات مساحت و محیط دایره از آن استفاده می‌کنیم، در واقع یک عدد گنگ است. البته معمولاً آن را به‌صورت ۳/۱۴ نشان می‌دهند. باید تذکر بدهیم که این عدد دارای ارقام اعشاری بی‌شماری است، ولی برای راحتی کار، معمولاً در محاسبات فقط تا ۲ رقم اعشار آن را استفاده می‌کنند.

$\pi =$ ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸...

ب) می‌دانیم اعدادی مانند ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵ و ... دارای جذر صحیح هستند. اما اعدادی مثل ۲، ۳، ۶، ۱۰ و ... جذر صحیح ندارند. اگر این اعداد را زیر رادیکال بنویسیم (در واقع جذر این اعداد)، اعداد گنگ ایجاد می‌شود.

$\sqrt{۲}$, $\sqrt{۳}$, $\sqrt{۶}$, $\sqrt{۱۰}$, ...

زیرا جذر این اعداد را هر چه‌قدر هم ادامه دهیم، تمام نمی‌شود و حتی عدد اعشاری متناوب هم ایجاد نمی‌شود. مثل:

($\sqrt{۲} =$ ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲ ...)

مثال ۱۵ کدام‌یک از اعداد زیر، گنگ و کدام یک گویا هستند؟

الف) $5/4 =$ عدد اعشاری (گویا) ب) $\sqrt{23} =$ (گنگ) ج) $\sqrt{49} = 7$ (گویا)

د) $\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{36}} = \dfrac{12}{6} = 2$ (گویا) ه) $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$ (گویا) و) $\dfrac{0}{-\sqrt{3}} = 0$ (گویا)

ز) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} =$ (گنگ) ح) $\dfrac{\sqrt{4} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{4} \times \cancel{\sqrt{7}}}{\cancel{\sqrt{7}}} = \sqrt{4} = 2$ (گویا)

ط) $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$ (گویا) ی) $\pi^2 =$ (گنگ)

نکته

بین هر دو عدد صحیح، تعداد زیادی عدد گنگ وجود دارد. اگر بخواهیم بین دو عدد صحیح، عدد گنگ بنویسیم، معمولاً از رادیکال کمک می‌گیریم، به این صورت که ابتدا دو عدد داده‌شده را به توان ۲ می‌رسانیم و زیر رادیکال می‌بریم، بعد بین دو رادیکال ساخته‌شده اعداد رادیکالی می‌نویسیم که جذر صحیح نداشته باشند.

مثال ۱۶ بین دو عدد ۵ و ۶، سه عدد گنگ بنویسید.

به‌جای ۵ و ۶، از $\sqrt{25}$ و $\sqrt{36}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{25} < \underbrace{\sqrt{26} < \sqrt{27} < \sqrt{28} < \cdots < \sqrt{35}}_{\text{اعداد گنگ}} < \sqrt{36}$$

مثال ۱۷ بین اعداد $-\sqrt{5}$ و -3، سه عدد گنگ بنویسید. $-\sqrt{5}$ خودش به‌صورت رادیکالی است، پس کافی است -3 را به‌صورت $-\sqrt{9}$ بنویسیم و بین آن‌ها، اعداد رادیکالی که جذر صحیح ندارند، بنویسیم:

$$-\sqrt{9} < \underbrace{-\sqrt{8} < -\sqrt{7} < -\sqrt{6}}_{\text{اعداد گنگ موردنظر}} < -\sqrt{5}$$

نکته

۱) اگر عددی گنگ باشد، قرینهٔ آن‌ها هم گنگ است.

$\text{گنگ}: \sqrt{2} \Rightarrow \text{گنگ}: -\sqrt{2}$

۲) جمع و تفریق یک عدد گنگ با یک عدد گویا، همواره عددی گنگ است.

$\underbrace{\sqrt{5}}_{\text{گنگ}} - \underbrace{\dfrac{1}{3}}_{\text{گویا}} \Rightarrow \text{گنگ}$ ، $\underbrace{2}_{\text{گویا}} + \underbrace{\sqrt{3}}_{\text{گنگ}} \Rightarrow \text{گنگ}$

۳) حاصل‌ضرب یک عدد گویا (به‌غیر از صفر) در یک عدد گنگ، همواره عددی گنگ است. (برای تقسیم هم این قضیه درست است).

$\dfrac{\overset{\text{گنگ}}{\sqrt{2}}}{\underset{\text{گویا}}{4}} \Rightarrow \text{گنگ}$ ، $\underbrace{5}_{\text{گویا}} \times \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{گنگ}} \Rightarrow 5\sqrt{2}\ \text{گنگ}$

۴) جمع دو عدد گنگ، ممکن است گنگ شود و یا ممکن است گویا شود.

$(\underbrace{\sqrt{2} - 1}_{\text{گنگ}}) + (\underbrace{4 - \sqrt{2}}_{\text{گنگ}}) = \cancel{\sqrt{2}} - 1 + 4 - \cancel{\sqrt{2}} = 3\ \text{گویا}$ ، $\underbrace{\sqrt{3}}_{\text{گنگ}} + \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{گنگ}} \Rightarrow \text{گنگ}$

$\underbrace{\sqrt{7}}_{\text{گنگ}} - \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{گنگ}} \Rightarrow \text{گنگ}$ ، $(\underbrace{\sqrt{3} + 2}_{\text{گنگ}}) - (\underbrace{\sqrt{3} - 4}_{\text{گنگ}}) = \cancel{\sqrt{3}} + 2 - \cancel{\sqrt{3}} + 4 = 6\ \text{گویا}$

۵) ضرب و تقسیم دو عدد گنگ، هم ممکن است گنگ شود و هم ممکن است گویا شود.

$\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{گنگ}} \times \underbrace{\sqrt{8}}_{\text{گنگ}} = \sqrt{16} = 4\ \text{گویا}$ ، $\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{گنگ}} \times \underbrace{\sqrt{3}}_{\text{گنگ}} = \underbrace{\sqrt{6}}_{\text{گنگ}}$

$\dfrac{\overset{\text{گنگ}}{4\sqrt{2}}}{\underset{\text{گنگ}}{3\sqrt{2}}} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \text{گویا}$ ، $\dfrac{\overset{\text{گنگ}}{\sqrt{3}}}{\underset{\text{گنگ}}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \text{گنگ}$