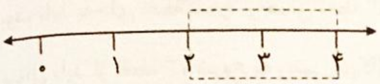
مثال ۲۳ به مجموعه‌ای که با خط‌چین روی محور نشان داده‌ایم، دقت کنید. اگر بخواهیم همهٔ اعدادی که در این خط‌چین وجود دارد را به‌صورت یک مجموعه نشان دهیم، آیا این مجموعه را می‌توان به زبان ریاضی به صورت‌های زیر نشان داد؟



$\{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \le x \le 4\}$ یا $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, 2 \le x \le 4\}$

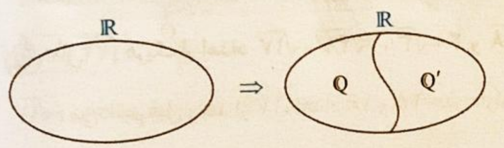
خیر. در مجموعهٔ $\{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \le x \le 4\}$ فقط اعداد ۲، ۳ و ۴ را داریم و مجموعهٔ $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, 2 \le x \le 4\}$ فقط شامل اعداد صحیح و گویا (مثل $2\frac{1}{3}$) می‌شود. اما در این محدوده بی‌شمار عدد گنگ هم وجود دارد (مثل $\sqrt{5}$) که هیچ‌کدام از این دو مجموعه، آن‌ها را نشان نمی‌دهند. به‌طور کلی بین هر دو عدد صحیح، به‌غیر از اعداد گویا، بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد که با استفاده از مجموعهٔ اعداد گویا ($\mathbb{Q}$) نمی‌توان آن‌ها را نشان داد.

اعداد حقیقی

همچنان که در مثال قبل متوجه شدید، بین هر دو عدد صحیح، بی‌شمار عدد گنگ و گویا وجود دارد. پس ما نمی‌توانیم فقط با استفاده از مجموعه‌های $\mathbb{Q}$ (اعداد گویا) یا فقط با استفاده از مجموعهٔ $\mathbb{Q}'$ (اعداد گنگ) همهٔ اعداد بین دو عدد صحیح را نشان دهیم. با توجه به این مشکل، مجموعهٔ جدیدی را تعریف می‌کنیم به‌نام مجموعهٔ اعداد حقیقی که آن را با حرف $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ اعداد حقیقی، کامل‌ترین مجموعه‌ای است که تاکنون با آن آشنا شده‌ایم. این مجموعه شامل همهٔ اعداد گویا و گنگ می‌شود. در واقع به زبان ساده‌تر، می‌توان گفت هر عددی که ما می‌شناسیم، عضو این مجموعه است. مجموعهٔ $\mathbb{R}$ همان اجتماع $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ است ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$).

به‌عنوان مثال وقتی می‌خواهیم مجموعه‌ای را که شامل همهٔ اعداد بین ۳ و ۴ است را معرفی کنیم، باید از $\mathbb{R}$ کمک بگیریم و بنویسیم $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 3 < x < 4\}$. معنی این تعریف این است که هر عددی (چه گویا و چه گنگ) که بین ۳ و ۴ قرار دارد، عضو مجموعهٔ A است.

نمایش اعداد حقیقی با نمودار ون



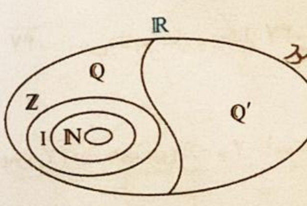
می‌دانیم که مجموعهٔ اعداد حقیقی، شامل مجموعهٔ اعداد گویا و گنگ است. پس می‌توانیم بگوییم که در نمودار ون، اگر مجموعهٔ اعداد حقیقی را با یک حلقه نشان دهیم، می‌توانیم این حلقه را به دو قسمت تقسیم کنیم. یکی اعداد گویا و دیگری اعداد گنگ. از طرفی، قبلاً گفته شد که اعداد صحیح، طبیعی و حسابی، همگی زیرمجموعهٔ اعداد گویا هستند و در نمودار ون، حلقه‌های آن‌ها درون حلقهٔ مجموعهٔ اعداد گویا رسم می‌شود. با این حساب رابطهٔ زیر را داریم: $\mathbb{N} \subset I \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

از طرفی:

$\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$

چرا هر دو نصف؟

با ۳ و ۲ و ۱ بی‌شمار عددی نمی‌شود ساخت

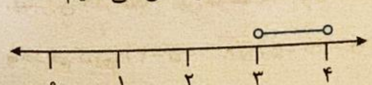


پس در واقع همهٔ مجموعه‌هایی که تا کنون شناخته‌ایم، زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ هستند:

$\mathbb{N}, I, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$

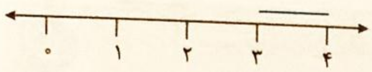
نمایش مجموعهٔ اعداد حقیقی روی محور

همان‌طور که می‌دانید، بین هر دو عدد صحیح، می‌توان بی‌شمار عدد گویا و گنگ نوشت، بنابراین نمی‌توانیم همهٔ آن‌ها را به‌صورت تک‌تک روی محور نشان دهیم. حال برای نشان دادن اعضای مجموعهٔ اعداد حقیقی روی محور، از خطّ مُمتد (پیوسته) مثل ——— استفاده می‌کنیم. مثلاً وقتی می‌خواهیم مجموعهٔ $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 3 < x < 4\}$ را روی محور نمایش دهیم، آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم.



نکاتی در مورد رسم اعداد حقیقی روی محور

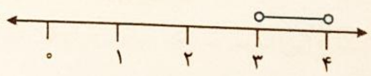
- همانطور که قبلاً گفته شد، بین هر دو عدد می‌توان بی‌شمار عدد دیگر هم نوشت، مثلاً بین ۳/۹ و ۴ می‌توان اعداد ۳/۹۹۹ و ۳/۹۹ (و بی‌شمار عدد دیگر مانند این‌ها) را نوشت. بنابراین اگر روی یک محور ما فقط یک خط رسم کنیم (مثل شکل زیر)، آنگاه مشخص نیست ابتدا و انتهای مجموعه، شامل کدام اعداد می‌شود.



چون ممکن است یک نفر ابتدا را ۳ و انتها را ۴ فرض کند و نفر دیگر ابتدا را ۳/۰۰۰۱ و انتها را ۳/۹۹۹۹۹ فرض کند. بنابراین همیشه برای مشخص کردن ابتدا و انتهای محدوده‌ها، از ○ استفاده می‌کنیم.

- اگر دایره‌ای که قرار می‌دهیم، مثل ○ تو خالی باشد، یعنی خود عدد، عضو مجموعه نیست، ولی اگر دایره‌ای توپُر رسم کنیم ●، یعنی خود عدد هم جزو مجموعه است. مانند:

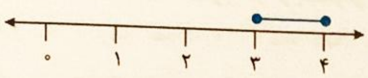
A :



همهٔ اعداد حقیقی بین ۳ و ۴
(خود ۳ و ۴ عضو مجموعه نیستند)

$\Rightarrow A = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ ۳ < x < ۴\}$

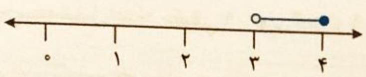
B :



همهٔ اعداد حقیقی از ۳ تا ۴
(خود ۳ و ۴ هم عضو مجموعه هستند)

$\Rightarrow B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ ۳ \le x \le ۴\}$

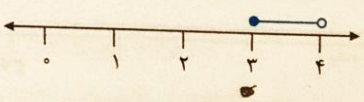
C :



همهٔ اعداد حقیقی بین ۳ و ۴
(۳ عضو مجموعه نیست ولی ۴ هست)

$\Rightarrow C = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ ۳ < x \le ۴\}$

D :

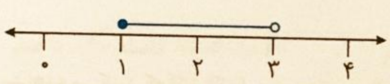


همهٔ اعداد حقیقی بین ۳ و ۴
(۳ عضو مجموعه هست ولی ۴ نیست)

$\Rightarrow D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ ۳ \le x < ۴\}$

$n \in \mathbb{N}$

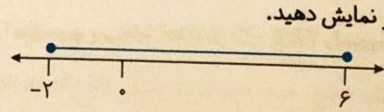
مثال ۲۴ | بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عددی که عضو مجموعهٔ زیر است را بنویسید.



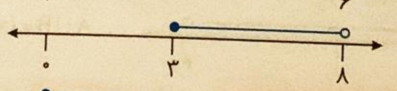
این مجموعه شامل اعداد حقیقی از ۱ تا ۳ است (۳ عضو مجموعه نیست ولی یک هست). کوچک‌ترین عضو این مجموعه، عدد یک است ولی بزرگ‌ترین عضو آن نامشخص است، زیرا هر عددی مثل ۳/۹۹۹۹۹۹ را در نظر بگیریم، بازهم یک عدد بزرگ‌تر مثل ۳/۹۹۹۹۹۹۹ را می‌توان نوشت که عضو این مجموعه باشد.

مثال ۲۵ | هر مجموعه را روی محور نمایش دهید.

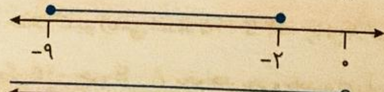
الف) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ -۲ \le x \le ۶\}$



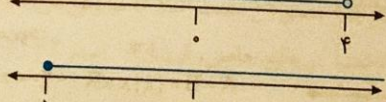
ب) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ ۳ \le x < ۸\}$



ج) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ -۹ \le x \le -۲\}$



د) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ x < ۴\}$



هـ) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ -۵ \le x\}$

دقت کنید در قسمت (د) $\{x<۴\}$، فقط انتهای مجموعه مشخص است و می‌دانیم هر عددی کوچک‌تر از ۴ باشد، در مجموعه قرار دارد. بنابراین برای سمت دیگر خط، دایره نمی‌کشیم و خط را از سمت دیگر تا انتها ادامه می‌دهیم. در قسمت (هـ) هم، فقط ابتدای مجموعه مشخص است، یعنی خود ۵- و اعداد بزرگ‌تر از ۵- عضو مجموعهٔ ما هستند. پس در قسمت دیگر خط، دایره نمی‌کشیم و آن را تا انتها ادامه می‌دهیم.

تذکر:

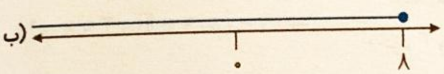
اگر در یک مجموعه به زبان ریاضی، نوشته نشود که اعداد عضو کدام مجموعه هستند، باید آن‌ها را عضو $\mathbb{R}$ فرض کنیم. مثلاً اگر بنویسند $\{x \mid -۳ \le x < ۲\}$ یعنی منظور $\{x \mid x \in \mathbb{R}\,,\ -۳ \le x < ۲\}$ است.

مثال ۲۶ هر مجموعه را به زبان ریاضی بنویسید.

الف)

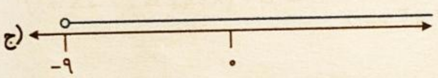
این مجموعه شامل اعداد حقیقی از ۱۱- تا ۵ است. ولی خود ۱۱- و ۵ عضو مجموعه نیستند: $\{x \mid -۱۱ < x < ۵\}$ یا $\{x \mid x \in \mathbb{R}\,,\ -۱۱ < x < ۵\}$

ب)



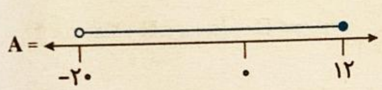
این مجموعه شامل اعداد حقیقی ۸ و کوچک‌تر از ۸ می‌باشد: $\{x \mid x \le ۸\}$ یا $\{x \mid x \in \mathbb{R}\,,\ x \le ۸\}$

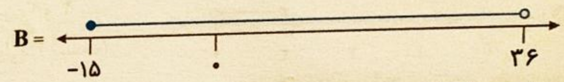
ج)



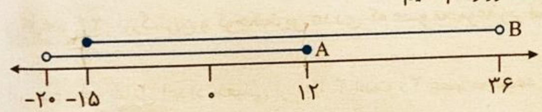
این مجموعه شامل اعداد حقیقی ۹- و بزرگ‌تر از ۹- است (۹- عضو مجموعه نیست): $\{x \mid -۹ < x\}$ یا $\{x \mid x \in \mathbb{R}\,,\ -۹ < x\}$

مثال ۲۷ اشتراک، اجتماع و تفاضل $(A-B)$ دو مجموعهٔ زیر را هم به زبان ریاضی و هم روی محور نمایش دهید.





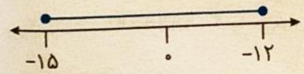
بهتر است برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا هر دو مجموعه را روی یک محور رسم کنیم:



مشاهده می‌کنید که اشتراک این دو مجموعه، (یعنی جایی که در هر دو مجموعه وجود دارد)، شامل اعداد ۱۵- تا ۱۲+ است.

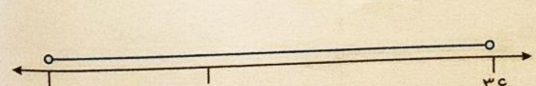
چون خود ۱۵- تا ۱۲+ در هر دو مجموعه حضور دارند، پس این اعداد هم عضو مجموعهٔ اشتراک هستند:

$$A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\,,\ -۱۵ \le x \le ۱۲\}$$



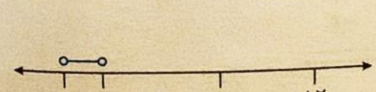
برای مجموعهٔ اجتماع، باید عضوهای هر دو مجموعه را بنویسیم. پس باید اعداد از ۲۰- تا ۳۶ را بنویسیم (خود ۲۰- و ۳۶ چون دایرهٔ سفید دارند، پس عضو مجموعهٔ اجتماع نیستند):

$$A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\,,\ -۲۰ < x < ۳۶\}$$



برای تفاضل $(A-B)$، باید عضوهای مشترک را از A حذف کنیم (یعنی اعداد ۱۵- تا ۱۲+ را از A حذف کنیم). حتی خود ۱۵- را هم باید حذف کنیم، زیرا این عدد عضو اشتراک است. پس دیگر ۱۵- جزو $A-B$ نخواهد بود و باید برای آن دایرهٔ سفید قرار دهیم. این مجموعه، شامل اعداد کوچک‌تر از ۱۵- و بزرگ‌تر از ۲۰- خواهد بود:

$$A - B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\,,\ -۲۰ < x < -۱۵\}$$

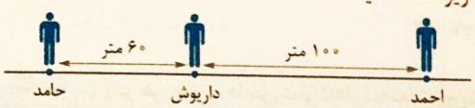


مقدارهای بدون علامت

در برخی مفهوم‌ها، علامت − بی‌معنی است (شاید بهتر است بگوییم همیشه علامت + وجود دارد). مثلاً وقتی در مورد جرم یک جسم روی زمین صحبت می‌کنیم، هرگز از علامت − استفاده نمی‌کنیم (آیا تا حالا شنیده‌اید که مثلاً بگویند جرم آن درخت ۵۰- کیلوگرم است)؟ یا وقتی در مورد قدّ یک نفر صحبت می‌کنیم، همواره از مقدارهای مثبت استفاده می‌کنیم. (هرگز نمی‌گوییم که مثلاً قدّ کیانوش ۱۷۵- سانتی‌متر است!) در این مفهوم‌ها (مقدارها)، فقط اندازه اهمیت دارد.

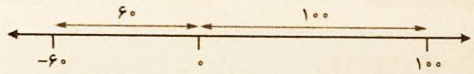
فاصله

یکی دیگر از مفهوم‌هایی که فقط اندازه در آن مهم است، فاصله است. به شکل زیر دقت کنید.



اینجا فاصلهٔ احمد تا داریوش ۱۰۰ متر و فاصلهٔ حامد تا داریوش ۶۰ متر است. با این‌که هرکدام از این دو نفر در یک سمت داریوش هستند، اما برای فاصلهٔ آن‌ها تا داریوش، از علامت‌های + و − استفاده نمی‌کنیم. بلکه فقط مقدار و اندازهٔ فاصله را می‌گوییم.

حال به شکل زیر دقت کنید. در اینجا محور اعداد صحیح را رسم کرده‌ایم. اگر دقت کنید فاصلهٔ عدد ۱۰۰+ تا صفر، برابر با ۱۰۰ واحد و فاصلهٔ عدد ۶۰- تا صفر هم؛ برابر با ۶۰ واحد است. یعنی روی محور اعداد صحیح هم، فاصلهٔ هر عدد را تا صفر، بدون علامت بیان می‌کنیم و در گفتن فاصله از علامت − استفاده نمی‌کنیم.



قدر مطلق

همان‌طور که در مثال قبل گفتیم: ۱۰۰ = فاصلهٔ ۱۰۰+ تا صفر ، ۶۰ = فاصلهٔ ۶۰- تا صفر

همان‌طور که می‌دانید، در ریاضی ما نباید از کلمات گفتاری استفاده کنیم. همواره در ریاضی برای بیان مفهوم‌ها، از علامت‌ها و قراردادهای ریاضی استفاده می‌شود. مثلاً به‌جای گفتن جذر، از علامت $\sqrt{\ }$ استفاده می‌کنیم. به همین دلیل برای بیان «فاصلهٔ یک عدد تا صفر» از علامت |عدد| استفاده می‌کنیم و به آن قدر مطلق می‌گوییم.

$|0| = 0$ = فاصلهٔ صفر تا صفر ، $|+100| = 100$ = فاصلهٔ ۱۰۰+ تا صفر ، $|-60| = 60$ = فاصلهٔ ۶۰- تا صفر

مثال ۲۸ حاصل هر عبارت را بنویسید.

الف) $|-112| = 112$ ب) $|4/5| = 4/5$ ج) $|3\frac{1}{3}| = 3\frac{1}{3}$

د) $|-2^7| = |-128| = 128$ هـ) $|(-2)^4| = |16| = 16$ و) $|-(-11)^2| = |-121| = 121$

نتیجه‌گیری: برای فاصلهٔ یک عدد تا صفر (قدر مطلق یک عدد) سه حالت وجود دارد:

الف) خود عدد مثبت باشد: در این حالت، حاصل خود عدد است (مثال $|+3| = 3$). اگر بخواهیم این موضوع را به زبان ریاضی بنویسیم، به‌صورت مقابل است: $a > 0 \Rightarrow |a| = a$ (عدد مثبت)

ب) عدد صفر باشد: در این صورت قدر مطلق آن، صفر است، زیرا از صفر تا خودش، فاصله‌ای نیست ($|0| = 0$).

$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$

ج) عدد منفی باشد: در این حالت، حاصل قدر مطلق آن مثبت است یا در واقع قرینهٔ خود عدد است. مثلاً قدر مطلق ۳- برابر با ۳+ است که می‌توان آن را به‌صورت $|-3| = 3$ نوشت. در واقع حاصل، قرینهٔ ۳- است $3 = -(-3) = |-3|$. این مطلب را به زبان ریاضی به‌صورت مقابل می‌نویسیم: $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$ (قرینهٔ عدد)

محاسبات درون قدر مطلق

اگر درون یک قدر مطلق، به‌جای یک عدد، یک عبارت ریاضی وجود داشته باشد، ابتدا مانند همهٔ عبارت‌های ریاضی، حاصل آن را به‌دست می‌آوریم و سپس با توجه به مفهوم قدر مطلق، حاصل نهایی را می‌نویسیم.

مثال ۲۹ **حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

الف) $|-5+(-4)| = |-5-4| = |-9| = 9$

ب) $|-3\times(-12)| = |+36| = 36$

ج) $|-2\underbrace{-4\times(-4)}_{+16}\underbrace{-12\div(-3)}_{+4}| = |-2+16+4| = |+18| = 18$

د) $|-3^2-2\times(-5+2^2)| = |-9-2\times\underbrace{(-5+4)}_{-1}| = |-9\underbrace{-2\times(-1)}_{+2}| = |-9+2| = |-7| = 7$

مثال ۳۰ **در هر بخش، حاصل عبارت‌ها را به‌دست آورید.**

الف) $|-28\div(4)-2^3-7|-3|-\sqrt{144}\div(-3)-2| = |\underbrace{-28\div(4)}_{-7}\underbrace{-2^3}_{-8}-7|-3|\underbrace{\underbrace{-\sqrt{144}}_{-12}\div(-3)}_{+4}-2|$

$= |-7-8-7|-3\times|4-2| = |-22|-3\times|+2| = 22-\underbrace{3\times2}_{6} = 16$

ب) $-2|\sqrt{64}-3\sqrt{36}+2|+3|\sqrt{225}-2\times\sqrt{144}| = -2\times|\underbrace{\sqrt{64}}_{8}-\underbrace{3\times\underbrace{\sqrt{36}}_{6}}_{18}+2|+3\times|\underbrace{\sqrt{225}}_{15}-2\times\underbrace{\sqrt{144}}_{12}|$

$= -2|8-18+2|+3\times|15-\underbrace{2\times12}_{24}| = -2|-8|+3\times|-9| = \overbrace{-2\times(8)}^{-16}+\overbrace{3\times9}^{27} = -16+27 = 11$

مثال ۳۱ **اگر $a=\frac{3}{5}$، $b=-2\frac{1}{3}$ و $c=2\frac{1}{4}$ باشد، حاصل عبارت $|3b-2\frac{1}{2}a-4c|$ را به‌دست آورید.**

کافی است مقدارها را درون عبارت جایگزین کنیم:

$$|3\times(-2\tfrac{1}{3})-2\tfrac{1}{2}\times\tfrac{3}{5}-4\times2\tfrac{1}{4}| = |\underbrace{3\times(\tfrac{-7}{3})}_{-7}\underbrace{-\tfrac{5}{2}\times\tfrac{3}{5}}_{-\frac{3}{2}}\underbrace{-4\times\tfrac{9}{4}}_{-9}| = |-7-\tfrac{3}{2}-9| = |-16\tfrac{3}{2}| = |-17\tfrac{1}{2}| = 17\tfrac{1}{2}$$

به مثال‌های زیر دقت کنید:

الف) $\begin{cases}|-2|\times|-3| = 2\times3 = 6\\ |-2\times(-3)| = |+6| = 6\end{cases}$

ب) $\begin{cases}|4|\times|3| = 4\times3 = 12\\ |4\times3| = |12| = 12\end{cases}$

ج) $\begin{cases}|-5|\times|4| = 5\times4 = 20\\ |-5\times4| = |-20| = 20\end{cases}$

نکته

با توجه به مثال‌های بالا، می‌توان فهمید که حاصل‌ضرب قدر مطلق‌های دو عدد ($|a|\times|b|$)، با قدر مطلق حاصل‌ضرب آن‌ها ($|a\times b|$) برابر است:

$|a|\times|b| = |a\times b|$

مثال ۳۲ **حاصل عبارت‌های داده‌شده را به‌دست آورید.**

الف) $|3+4| = 7 = 3+4$

ب) $|100+60| = 160 = 100+60$

نکته

با توجه به مثال‌های بالا، می‌توان فهمید، اگر دو عدد مثبت باشند ($a>0\,,\,b>0$)، آنگاه قدر مطلق مجموع آن‌ها، با مجموع خود آن‌ها برابر است:

$|a+b| = a+b$

مثال ۳۳ **حاصل عبارت‌های داده‌شده را به‌دست آورید.**

الف) $|-۲-۳| = |-۵| = ۵ = -(-۵) = -(-۲-۳)$

ب) $|-۷-۱۱| = |-۱۸| = ۱۸ = -(-۱۸) = -(-۷-۱۱)$

نکته

با توجه به مثال‌های بالا، می‌توان فهمید که اگر دو عدد منفی داشته باشیم $(a<0\ ,\ b<0)$، آن‌گاه قدر مطلق مجموع آن‌ها، برابر با قرینهٔ مجموع آن‌هاست:

$|a+b| = -(a+b)$

به مثال‌های زیر دقت کنید:

الف) $\begin{cases} |-۳|+|+۲| = ۳+۲ = ۵ \\ |-۳+۲| = |-۱| = ۱ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} |۴|+|+۳| = ۴+۳ = ۷ \\ |۴+۳| = |۷| = ۷ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} |-۳|+|-۵| = ۳+۵ = ۸ \\ |-۳-۵| = |-۸| = ۸ \end{cases}$

نکته

با توجه به مثال‌های بالا، می‌توان فهمید که اگر ابتدا اعداد را باهم جمع کنیم و بعد قدر مطلق بگیریم، حاصل همواره یا مساوی یا کم‌تر از زمانی است که ابتدا جدا جدا قدر مطلق می‌گیریم و بعد حاصل‌ها را باهم جمع می‌کنیم:

$|a+b| \leq |a|+|b|$

مثال ۳۴ **حاصل عبارت‌های داده‌شده را به‌دست آورید.**

الف) $|۳|+۳ = ۳+۳ = ۶$

ب) $|-۵|+(-۵) = ۵+(-۵) = ۰$

ج) $|۰|+(۰) = ۰+۰ = ۰$

نکته

با توجه به مثال‌های بالا، می‌توان فهمید جمع هر عدد با قدر مطلقش $(a+|a|)$، همواره یا صفر می‌شود یا از صفر بزرگ‌تر است:

$|a|+a \geq ۰$

ساده کردن عبارت‌های قدر مطلق

گاهی امکان محاسبهٔ دقیق حاصل یک عبارت قدر مطلقی وجود ندارد و ما فقط می‌خواهیم حاصل را به ساده‌ترین صورت بنویسیم. در اینجا باید با استفاده از مطالبی که تاکنون آموخته‌ایم، سادهٔ شدهٔ عبارت را محاسبه کنیم.

مثال ۳۵ **حاصل عبارت $|۲^{۷۵} - ۳^{۹۰}|$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.**

همانطور که می‌بینید، اعداد $۲^{۷۵}$ و $۳^{۹۰}$ بسیار بزرگ هستند و امکان محاسبهٔ آن‌ها (به‌صورت دستی) وجود ندارد. پس در اینجا ابتدا مشخص می‌کنیم که حاصل عبارت درون قدر مطلق مثبت است یا خیر. می‌دانیم $۳^{۹۰}$ بزرگ‌تر از $۲^{۷۵}$ است. پس حاصل $۲^{۷۵} - ۳^{۹۰}$ یک عدد منفی است. قبلاً گفتیم اگر عدد داخل قدر مطلق منفی باشد، حاصل قدر مطلق قرینهٔ آن است (مثلاً $|-۳| = -(-۳) = ۳$). پس در اینجا هم حاصل قدر مطلق برابر با قرینهٔ عبارت $۲^{۷۵} - ۳^{۹۰}$ است:

$|۲^{۷۵} - ۳^{۹۰}| = -(۲^{۷۵} - ۳^{۹۰}) = -۲^{۷۵} + ۳^{۹۰} = ۳^{۹۰} - ۲^{۷۵}$

مثال ۳۶ **حاصل $|\sqrt{۱۷} - \sqrt{۱۳}|$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.**

+

می‌دانیم $\sqrt{۱۷}$ از $\sqrt{۱۳}$ بزرگ‌تر است. پس حاصل $\sqrt{۱۷} - \sqrt{۱۳}$ عددی مثبت است. قبلاً گفتیم اگر داخل قدر مطلق عددی مثبت باشد، جواب قدر مطلق، همان عدد است. (مثلاً $|۵| = ۵$)

$|\sqrt{۱۷} - \sqrt{۱۳}| = \sqrt{۱۷} - \sqrt{۱۳}$

مثال ۳۷ **حاصل عبارت $|۷ - ۵\sqrt{۳}|$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.**

در اینجا هم کافی است هر دو عدد را به‌توان ۲ برسانیم. دقت کنید برای اینکه $۵\sqrt{۳}$ را به‌توان ۲ برسانیم، هم ۵ و هم $\sqrt{۳}$ را باید به‌توان ۲ برسانیم و حاصل را در هم ضرب کنیم $\left((۵\sqrt{۳})^{۲} = ۵^{۲} \times ۳ = ۷۵ \,,\, ۷^{۲} = ۴۹\right)$. پس عدد ۷ از $۵\sqrt{۳}$ کوچک‌تر است، بنابراین $۷ - ۵\sqrt{۳}$ عددی منفی است و قدر مطلق آن برابر با قرینهٔ آن است:

$$|۷ - ۵\sqrt{۳}| = -(۷ - ۵\sqrt{۳}) = -۷ + ۵\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳} - ۷$$

مثال ۳۸ **حاصل $|۵\sqrt{۷} - ۷\sqrt{۵}|$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.**

$(۷\sqrt{۵})^{۲} = ۷^{۲} \times ۵ = ۲۴۵$ و $(۵\sqrt{۷})^{۲} = ۵^{۲} \times ۷ = ۱۷۵$. پس $۵\sqrt{۷}$ از $۷\sqrt{۵}$ کوچک‌تر است و عبارت $۵\sqrt{۷} - ۷\sqrt{۵}$ عددی منفی است و قدر مطلق آن با قرینه‌اش برابر است:

$$|۵\sqrt{۷} - ۷\sqrt{۵}| = -(۵\sqrt{۷} - ۷\sqrt{۵}) = -۵\sqrt{۷} + ۷\sqrt{۵} = ۷\sqrt{۵} - ۵\sqrt{۷}$$

به مثال‌های زیر دقت کنید.

الف) $\sqrt{۳^{۲}} = \sqrt{۹} = ۳$ ب) $\sqrt{۵^{۲}} = ۵$

با توجه به مثال‌های بالا، می‌توانیم بگوییم اگر عددی مثل a که از صفر بزرگ‌تر است $(a > ۰)$ داشته باشیم، هرگاه $a^{۲}$ را زیر رادیکال داشته باشیم، حاصل برابر با a می‌شود.

$$\sqrt{a^{۲}} = a$$

به مثال‌های زیر دقت کنید.

الف) $\sqrt{(-۳)^{۲}} = \sqrt{۹} = ۳$ ب) $\sqrt{(-۵)^{۲}} = \sqrt{۲۵} = ۵$

مشاهده می‌کنید که اگر در زیر رادیکال یک عدد منفی را به‌توان ۲ برسانیم، حاصل برابر با قرینهٔ آن عدد می‌شود.

الف) $\sqrt{(\underbrace{-۳}_{\text{قرینه}})^{۲}} = ۳$ ب) $\sqrt{(\underbrace{-۵}_{\text{قرینه}})^{۲}} = ۵$

پس اگر یک عدد منفی مثل a داشته باشیم $(a < ۰)$، آنگاه آن را در زیر رادیکال به‌توان ۲ برسانیم $(a^{۲})$، حاصل برابر قرینهٔ a می‌شود.

$$\sqrt{a^{۲}} = -a$$