

مثلاً وقتی ما طول جاده‌ای که ۱۴ کیلومتر است را روی نقشه، به اندازه ۷ سانتی‌متر رسم می‌کنیم، مقیاس رسم شده برابر است با:

$$\text{مقیاس نقشه} = \frac{7}{1400000} = \frac{1}{200000} \quad (14 \text{ km} = 1400000 \text{ cm})$$

بنابراین وقتی می‌گوییم مقیاس یک نقشه  $\frac{1}{200000}$  است، یعنی نسبت مقدار رسم شده به مقدار واقعی، مثل ۱ به ۲۰۰۰۰۰ است.

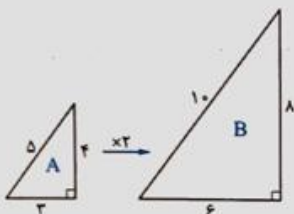
**مثال ۴۱** مقیاس یک نقشه،  $\frac{1}{50000}$  است. اگر طول یک جاده روی این نقشه ۱۲ سانتی‌متر باشد، طول واقعی آن چند کیلومتر است؟

$$\text{مقیاس} = \frac{\text{اندازه رسم شده}}{\text{اندازه واقعی}} \Rightarrow \frac{1}{50000} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{50000 \times 12}{1} = 600000 \text{ cm} = 6 \text{ km}$$

### تشابه و محیط شکل‌ها

به شکل‌های زیر دقت کنید. در هر قسمت دو شکل متشابه رسم شده و نسبت محیط‌های آن‌ها را نوشته‌ایم.

الف)



$$\left. \begin{array}{l} A \text{ محیط} = 12 \\ B \text{ محیط} = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{24}{12} = 2$$

نسبت تشابه = ۲


ب)



$$\left. \begin{array}{l} A \text{ محیط} = 16 \\ B \text{ محیط} = 48 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{48}{16} = 3$$

نسبت تشابه = ۳

مشاهده می‌کنید که نسبت محیط‌های دو شکل متشابه، با نسبت تشابه آن‌ها یکسان است. علت این موضوع آن است که در تشابه، ما نکتک ضلع‌های شکل اول را در عددی مثل  $a$  ضرب می‌کنیم و چون محیط شکل برابر با جمع ضلع‌ها است، پس محیط هم  $a$  برابر می‌شود. این عدد را برای مستطیل مقابل به صورت جبری نشان داده‌ایم:



$$\text{محیط} = 2 \times (m+n) \quad \text{محیط} = 2 \times (ma+na) \xrightarrow{\text{از } a \text{ فاکتور می‌گیریم}} 2 \times a \times (m+n)$$

$$\Rightarrow \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{2 \times a \times (m+n)}{2 \times (m+n)} = a$$

**مثال ۴۲** مثلثی به اضلاع ۵، ۶ و ۹ با مثلثی به محیط ۶۰ متر، متشابه است. کوچک‌ترین ضلع مثلث دوم چه قدر است؟

می‌دانیم نسبت تشابه با نسبت محیط‌ها برابر است. محیط مثلث اول ۲۰ است:

$$\frac{\text{کوچک‌ترین ضلع مثلث دوم}}{\text{کوچک‌ترین ضلع مثلث اول}} = \frac{x}{5} = \frac{60}{20} \Rightarrow x = \frac{60 \times 5}{20} = 15$$



**مثال ۴۳** نسبت تشابه دو چهارضلعی متشابه  $\frac{3}{5}$  است. اگر محیط اولی ۱۵ باشد، محیط دومی چند است؟

در اینجا نمی‌توانیم تشخیص دهیم که کدام یک بزرگ‌تر هستند. پس یک بار فرض می‌کنیم محیط چهارضلعی اول بیش‌تر است و بار دیگر فرض می‌کنیم محیط چهارضلعی دوم بیش‌تر است:

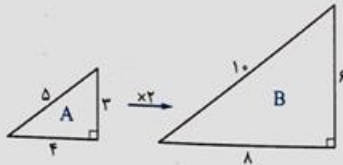
$$\text{نسبت تشابه} = \frac{\text{محیط دومی}}{\text{محیط اولی}} = \frac{3}{5} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{3 \times 15}{5} = 9$$

$$\frac{3}{5} = \frac{\text{محیط اولی}}{\text{محیط دومی}} = \frac{3}{x} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \times 15}{3} = 25$$

### تشابه و مساحت شکل‌ها

در هر یک از قسمت‌های زیر، دو شکل متشابه و نسبت مساحت‌های آن‌ها آورده شده است.

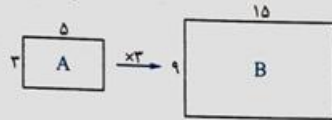
الف)



$$\left. \begin{array}{l} \text{A مساحت} = 6 \\ \text{B مساحت} = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{24}{6} = 4 = 2^2$$

نسبت تشابه = ۲

ب)



$$\left. \begin{array}{l} \text{A مساحت} = 15 \\ \text{B مساحت} = 135 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{135}{15} = 9 = 3^2$$

نسبت تشابه = ۳

مشاهده می‌کنید نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه، برابر با مربع (توان ۲) نسبت تشابه آن‌هاست. علت این موضوع آن است که در مساحت، دو بُعد در هم ضرب می‌شوند (مثلاً طول در عرض ضرب می‌شود) و چون هر کدام در عددی مثل  $a$  ضرب شده‌اند، پس مانند این است که مساحت در  $a \times a$ ، یعنی  $a^2$  ضرب شده باشد. این موضوع را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\times a} & \begin{array}{|c|} \hline na \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline ma \\ \hline \end{array} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{مساحت} = m \times n & & \text{مساحت} = ma \times na = m \times n \times a^2 \end{array} \Rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{m \times n \times a^2}{m \times n} = a^2$$

**مثال ۴۴** نسبت تشابه دو چهارضلعی  $\frac{3}{5}$  است. اگر مساحت شکل کوچک‌تر ۵۴ باشد، مساحت شکل بزرگ‌تر چه قدر است؟

$$\left( \frac{3}{5} \right)^2 = \frac{9}{25} = \text{نسبت مساحت‌ها} \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\text{مساحت کوچک‌تر}}{\text{مساحت بزرگ‌تر}} = \frac{9}{25} = \frac{54}{x} = \frac{9}{25} \Rightarrow x = \frac{25 \times 54}{9} = 150$$

**مثال ۴۵** نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه  $\frac{36}{49}$  است. اگر محیط یکی از آن‌ها ۴۲۰ باشد، محیط دیگری چند است؟

می‌دانیم نسبت مساحت‌ها، برابر با مربع نسبت تشابه است. پس اگر از نسبت مساحت‌ها جذر بگیریم، نسبت تشابه دو شکل به دست می‌آید:

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{6}{7} = \frac{36}{49} = \text{نسبت مساحت‌ها}$$

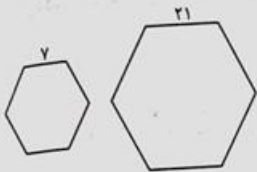
از طرفی چون نسبت تشابه با نسبت محیطها برابر است، پس نسبت محیطهای دو شکل هم  $\frac{6}{7}$  است. ما نمی‌دانیم  $420$  محیط شکل بزرگتر است یا شکل کوچکتر، پس باید برای هر دو حالت، مسئله را حل کنیم:

$$\frac{\text{محیط کوچکتر}}{\text{محیط بزرگتر}} = \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{\text{محیط کوچکتر}}{420} = \frac{6}{7} \Rightarrow \text{محیط کوچکتر} = \frac{6 \times 420}{7} = 360$$

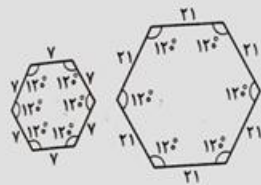
$$\frac{\text{محیط کوچکتر}}{\text{محیط بزرگتر}} = \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{420}{\text{محیط بزرگتر}} = \frac{6}{7} \Rightarrow \text{محیط بزرگتر} = \frac{7 \times 420}{6} = 490$$

### شکل‌های منتظم و متشابه

به دو شش‌ضلعی منتظم مقابل دقت کنید.



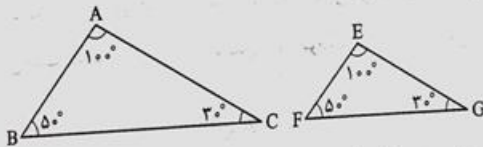
قبلاً گفتیم در دو شکل متشابه، زاویه‌ها مساوی‌اند و همه ضلع‌ها با یک نسبت بزرگ یا کوچک می‌شوند. از آنجا که در هر شش‌ضلعی منتظم، اندازه زاویه‌ها همواره  $120^\circ$  است و ضلع‌ها مساوی است، پس دو شکل داده‌شده، در واقع به صورت زیر هستند. مشاهده می‌کنید که همه ضلع‌ها ۳ برابر شده‌اند و همه زاویه‌ها مساوی‌اند. پس می‌توان نتیجه گرفت که هر دو شکل منتظم که تعداد ضلع‌هایشان برابر است (مثلاً هر دو ۵ ضلعی منتظم یا هر دو ۲۸ ضلعی منتظم) همواره با هم متشابه هستند.



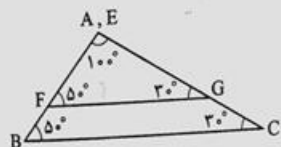
به‌طور کلی، هر دو  $n$  ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه هستند.

### موازی بودن ضلع‌های متناظر در شکل‌های متشابه

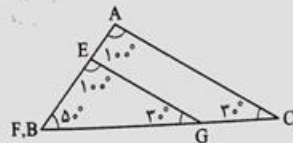
قبلاً گفتیم در شکل‌های متشابه، زاویه‌ها با هم برابرند. اکنون به شکل زیر دقت کنید. در شکل زیر، دو مثلث  $ABC$  و  $EFG$  متشابه هستند. پس زاویه‌های آن‌ها برابر است.



اکنون دو مثلث را طوری روی هم رسم کنیم که زاویه‌های  $100^\circ$  آن‌ها روی هم قرار بگیرد. مشاهده می‌کنید که ضلع مورب  $AB$  روی ضلع‌های  $FG$  و  $BC$  زاویه  $50^\circ$  ساخته است. پس نتیجه می‌گیریم که قاعده‌های دو مثلث، یعنی  $BC$  و  $FG$  موازی‌اند.



حال دو مثلث را به صورتی رسم می‌کنیم که زاویه‌های  $50^\circ$  دو مثلث (یعنی  $\hat{B}$  و  $\hat{F}$ ) روی هم قرار گیرد.



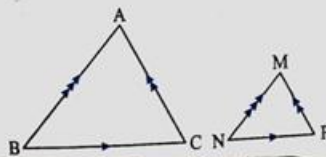
مشاهده می‌کنید که ضلع  $AB$  روی ضلع‌های  $EG$  و  $AC$  زاویه‌های  $100^\circ$  درجه ساخته است. پس نتیجه می‌گیریم  $AC \parallel EG$  است.

به همین صورت می‌توان ثابت کرد که ضلع‌های  $AB$  و  $EF$  هم در دو مثلث موازی هستند.

بنابراین می‌توان گفت در دو مثلث متشابه، ضلع‌های متناظر دویهدو موازی‌اند.

مثلاً اگر بدانیم دو مثلث  $ABC$  و  $MNP$  متشابه هستند، پس:

$$AB \parallel MN, AC \parallel MP, BC \parallel NP$$

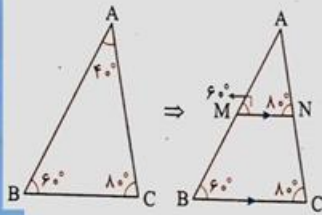




نکته

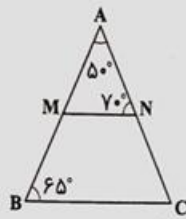


با توجه به مطالبی که گفته شد، می‌توان فهمید که اگر در یک مثلث خطی موازی قاعده رسم کنیم، مثلث کوچک ایجاد شده با مثلث بزرگ متشابه هستند (زیرا زاویه‌های آن‌ها برابر خواهند بود).

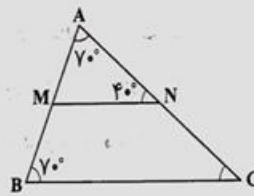


مثلث‌های  $AMN$  و  $ABC$  متشابه هستند.

مثال ۴۶ در کدام شکل، دو مثلث کوچک و بزرگ متشابه هستند.

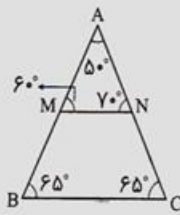


(الف)

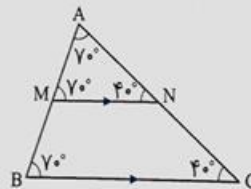


(ب)

اگر اندازه زاویه‌های دو مثلث را محاسبه کنیم، می‌بینیم که در مثلث (ب)، زاویه‌های  $N$  و  $C$  و زاویه‌های  $M$  و  $B$  با هم برابرند. پس نتیجه می‌گیریم  $MN \parallel BC$  است. بنابراین دو مثلث متشابه هستند.



(الف)



(ب)