

نامعادلات درجه اول

۱- نامساوی‌ها

کمبرای مقایسه‌ی دو عدد حقیقی متمایز، از نمادهای نامساوی ($<$ یا $>$) استفاده می‌کنیم.

• مثال :

- برای مقایسه‌ی دو عدد ۱۵ و ۲۰ نامساوی ($۱۵ < ۲۰$) را می‌نویسیم و می‌خوانیم « ۱۵ کوچکتر از ۲۰ است »

و یا می‌نویسیم ($۲۰ > ۱۵$) و می‌خوانیم « ۲۰ بزرگتر از ۱۵ است » .

📄 تذکر ۱ :

☞ هرگاه $a < b$ یا $a = b$ باشد، می‌نویسیم $a \leq b$ و می‌خوانیم « a کوچکتر یا مساوی با b است » .

۲- خواص نامساوی‌ها

۱) اگر $a < b$ باشد، در این صورت : $a + b < b + c$

یعنی می‌توان به طرفین یک نامساوی، مقداری اضافه کرد، بدون آنکه جهت نامساوی تغییر کند.

• مثال :

$$-2 < 4 \Rightarrow -2 + 3 < 4 + 3$$

۲) اگر $a < b$ باشد، در این صورت : $a - b < b - c$

یعنی می‌توان از طرفین یک نامساوی، مقداری را کم کرد، بدون آنکه جهت نامساوی عوض شود.

• مثال :

$$-2 < 4 \Rightarrow -2 - 3 < 4 - 3$$

۳) اگر $a < b$ و c مثبت ($c > 0$) باشد، در این صورت : $ca < cb$

یعنی اگر طرفین نامساوی را در عددی مثبت ضرب کنیم، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

• مثال :

$$-2 < 4, 3 > 0 \Rightarrow 3(-2) < 3(4)$$

۴) اگر $a < b$ و c منفی ($c < 0$) باشد، در این صورت : $ca > cb$

یعنی اگر طرفین نامساوی را در عددی منفی ضرب کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود.

• مثال :

$$-2 < 4, -3 < 0 \Rightarrow -3(-2) > -3(4)$$

$$(5) \text{ اگر } a < b \text{ و } c > 0 \text{ باشد، در این صورت: } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

یعنی اگر طرفین نامساوی را بر عددی مثبت تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

• مثال:

$$-2 < 4, 2 > 0 \Rightarrow \frac{-2}{2} < \frac{4}{2}$$

$$(6) \text{ اگر } a < b \text{ و } c < 0 \text{ باشد، در این صورت: } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

یعنی اگر طرفین نامساوی را در عددی منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود.

• مثال:

$$-2 < 4, 2 < 0 \Rightarrow \frac{-2}{-2} > \frac{4}{-2}$$

تذکره ۲:

خواص بالا که درباره‌ی نماد < مطرح شد، در مورد نمادهای > و ≤ و ≥ نیز برقرار است.

۳- نامعادلات درجه اول:

از ویژگی‌های نامساوی: در اثبات برخی از مسایل و حل نامعادلات استفاده می‌شود.

• مثال:

$$1- \text{ اگر } a > 1, \text{ ثابت کنید: } a + \frac{1}{a} > 2$$

$$a > 1 \quad a - 1 > 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 1) > 0 \times (a - 1)$$

$$\Rightarrow (a - 1)^2 > 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 > 0 \Rightarrow a^2 + 1 > 2a \quad \underbrace{\frac{a^2}{a} + \frac{1}{a}}_{\text{تقسیم بر } a} > \frac{2a}{4} \Rightarrow a + \frac{1}{a} > 2$$

نامساوی کوچکتر یا مساوی: برای نمایش این که عدد a از عدد b کوچکتر یا مساوی آن است، می‌نویسیم

$a \leq b$ و به معنای آن است که یکی از دو حالت $a < b$ یا دقیقاً $a = b$ برقرار است.

• مثال:

2- دلیل درستی یا نادرستی نامساوی‌های زیر را بیان کنید.

$$\text{الف) } 3 \leq 5 \quad \text{ب) } -2 \leq -2 \quad \text{ج) } 4 \leq 3$$

پاسخ:

الف) درست است، زیرا عدد ۳ از عدد ۵ کوچکتر است.

ب) درست است، زیرا عدد (-۲) با عدد (-۲) برابر است.

ج) نادرست است، زیرا عدد ۴ نه از ۳ کوچکتر است و نه با آن برابر است.

۳- اگر n یک عدد طبیعی و $n \geq 3$ ، نشان دهید $n \geq 1$.

$$\frac{n \geq 3}{3 \geq 1} \Rightarrow n \geq 1$$

۴- اگر $a < 0$ ، ثابت کنید: $a + \frac{1}{a} \leq -2$

پاسخ: می‌دانیم مربع هر عدد حقیقی بزرگتر از صفر یا مساوی صفر است، بنابراین:

$$(a+1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 \geq 0 \xrightarrow{a < 0} \frac{a^2}{a} + \frac{2a}{a} + \frac{1}{a} \leq 0 \Rightarrow a + 2 + \frac{1}{a} \leq 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2$$

توجه کنید چون بر عدد منفی نامساوی تقسیم شده است جهت نامساوی عوض شده است.

نامعادله: مسایلی که نامساوی بین دو چند جمله‌ای یا دو عبارت گویا شامل متغیر را نشان می‌دهد یک

نامعادله می‌گویند. در صورتیکه درجه‌ی متغیر چند جمله‌ای‌ها حداکثر یک باشد، نامعادله‌ی درجه اول نامیده می‌شود.

مجموعه جواب نامعادله: جواب‌های یک نامعادله مقادیری از متغیر نامعادله هستند که به ازای آنها نامساوی

برقرار شود. همه‌ی جواب‌های یک نامعادله تشکیل مجموعه‌ی جواب آن نامعادله را می‌دهد.

• مثال:

۵- در نامعادله‌ی $-2x + 3 < x - 1$ کدامیک از اعداد -1 و 0 و 1 و 2 و 3 جواب نامعادله هستند؟

پاسخ: با آزمایش اعداد در نامعادله تحقیق می‌کنیم نامعادله درست است یا نادرست.

$$-2(-1) + 3 < -1 - 1 \Rightarrow 5 < -2 \quad \text{برقرار نمی‌باشد}$$

$$-3(1) + 3 < 1 - 1 \Rightarrow 0 < 0 \quad \text{برقرار نمی‌باشد}$$

$$-2(0) + 3 < 0 - 1 \Rightarrow 3 < -1 \quad \text{برقرار نمی‌باشد}$$

$$-2(3) + 3 < 3 - 1 \Rightarrow -3 < 2 \quad \text{برقرار است}$$

$$-2(2) + 3 < 2 - 1 \Rightarrow -1 < 1 \quad \text{برقرار است}$$

$$\{2 \text{ و } 3\} \quad \text{مجموعه جواب نامعادله}$$

برای حل نامعادله درجه اول: با استفاده از خواص نامساوی‌ها به یکی از حالات $x < a$ ، $x \leq a$ ، $x > a$ یا

$x \geq a$ می‌رسیم. برای مشخص کردن مجموعه‌ی جواب روی محور اعداد نیز با توجه به نتیجه نهایی حل نامعادله

جاهایی که جزء مجموعه جواب است را پررنگ تر می‌کنیم.

• مثال:

۶- نامعادله‌ی $2x - 3 < x + 1$ را حل کنید و مجموعه جواب را روی محور اعداد مشخص کنید.

$$2x - 3 < x + 1 \Rightarrow 2x - 3 + 3 < x + 1 + 3 \Rightarrow 2x < x + 4 \Rightarrow 2x - x < x - x + 4 \Rightarrow x < 4$$

توجه کنید چون $x = 4$ جواب نامعادله نمی‌باشد به صورت تو خالی نشان داده شده است.



۷- نامعادله $\frac{x}{2} < x - \frac{1}{3}$ را حل کنید و مجموعه جواب را روی محور اعداد نشان دهید.

حل : ابتدا طرفین نامعادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها (در اینجا ۶) ضرب می‌کنیم تا از

حالت کسری خارج شود.

$$6\left(\frac{x}{2}\right) < 6\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow 3x < 6x - 2 \Rightarrow 3x - 3x < 6x - 3x - 2 \Rightarrow 0 < 3x - 2$$

$$0 + 2 \leq 3x - 2 + 2 \Rightarrow 2 \leq 3x \xrightarrow{\text{تقسیم بر 3}} \frac{2}{3} \leq x$$

۸- دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 2x - 1 < x + 3 \\ 3(1 - x) < 2 \end{cases}$ را حل کنید.

$$2x - 1 < x + 3 \Rightarrow 2x - x < 3 + 1 \Rightarrow \boxed{x < 4} \text{ (*)}$$

$$3(1 - x) < 2 \Rightarrow 3 - 3x < 2 \Rightarrow -3x < 2 - 3 \Rightarrow -3x < -1 \Rightarrow \xrightarrow{\text{تقسیم بر } (-3)} \frac{-3x}{-3} > \frac{-1}{-3} \Rightarrow x > \frac{1}{3} \text{ (***)}$$

جواب دستگاه از اشتراک جواب‌های (*) و (***) بدست می‌آید. $\boxed{\frac{1}{3} < x < 4}$



۹- نامعادله $2 - 3x \leq 1 + x \leq 2x - 6$ را حل کنید.

حل : در حقیقت نامعادله از دو معادله $2 - 3x \leq 1 + x$ و $1 + x \leq 2x - 6$ تشکیل شده است :

جواب مشترک این دو نامعادله پاسخ مسأله است. داریم :

$$2 - 3x \leq 1 + x \Rightarrow -3x - x \leq 3 + 1 \Rightarrow \frac{-4x}{-4} \geq \frac{-1}{-4} \Rightarrow \boxed{x \geq \frac{1}{4}} \text{ (*)}$$

$$1 + x \leq 2x - 6 \Rightarrow 1 + 6 \leq 2x - x \Rightarrow \boxed{7 \leq x} \text{ (***)}$$

برای تعیین اشتراک دو ناحیه (*) و (***) از محور اعداد استفاده می‌کنیم.



با کمی دقت دیده می‌شود $x \geq 7$ جواب مشترک دو نامعادله می‌باشد. لذا $x \geq 7$ جواب اسن مسئله می‌باشد.

۳- نامعادله

* نامعادلات زیر را حل کنید.

1) $3x - 5 < 16$

2) $\frac{x-8}{16} \geq \frac{2+x}{8}$

3) $x + \frac{x-1}{3} > 3x$

4) $\frac{2x}{3} + \frac{x}{4} + 5 < \frac{x}{6} - 1$

5) $(x-1)^2 - (x+1)^2 < 3x+4$

6) $-x \leq 3x+4 \leq 4x+6$

7) $2x-3 < x+1$, $x+1 < 3x-5$

$$8) \begin{cases} -x \leq x + 2 \\ -6x - 5 \geq 3x + 4 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3x-1}{4} < \frac{x+1}{8} \\ \frac{2x}{3} - \frac{x}{2} > x \end{cases}$$

$$10) \frac{x-2}{6} - \frac{x+1}{3} < \frac{x-3}{4}$$

$$11) x^2 + \frac{x}{2} \geq (x-1)^2$$

$$12) \begin{cases} \frac{3x-1}{2} + \frac{2x-1}{3} > \frac{x-1}{6} \\ \frac{5x-1}{3} - \frac{x+2}{4} < \frac{2x-1}{12} \end{cases}$$

$$13) -2 < \frac{x+5}{2} < 2$$

$$14) 2 \leq 3x - 7 < 14 + 2x$$

$$15) x - 4 < 3x - 2 \leq 2x + 3$$

$$16) (x-2)^2 < x^2 + 1 < (x+1)^2$$

۱۷- مساحت مستطیلی نباید از 32 cm^2 بیشتر باشد و طول آن باید برابر ۸ باشد عرض مستطیل چه مقادیری میتواند اختیار کند؟

۱۸- دو عدد طبیعی فرد متوالی را به دست آورید که مجموع آنها حداکثر ۲۰ باشد؟

۱۹- اعدادی را بیابید که تفاضل سه برابر آنها از عدد یک بین اعداد ۲ و ۷ باشد.

* مجموع جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید و روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

$$20) \quad 1 - 2x < x + 4$$

$$21) \quad (x + 1)^2 > x^2$$

$$22) \quad 2x + 1 > x - 2$$

$$23) \quad 3x < 1 - x$$

24) $(3x + 1)^2 \geq (3x - 1)(3x + 1)$

25) $\frac{x+2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x-1}{3} + \frac{3}{2}$

26) $\frac{8x+5}{9} - \frac{2x+23}{6} > \frac{x+4}{4} - \frac{x}{12}$

27) $x^2 + 5 \geq (x-2)^2 + 7$

28) $x^2 + 3x < (x+3)^2$

29) $(x+1)^2 - (x-1)^2 \geq 0$

30) $\frac{x+1}{5} < \frac{5x-1}{6} + 1$

31) $(x-1)^2 < x^2 + \frac{x}{8} - 1$

32) $\frac{x-4}{4} - \frac{x-8}{4} \geq x - \frac{2x-3}{4}$

33) $(2x-1)^2 + 3x \leq (2x+1)^2$

34) $x(x-3) \leq (x-1)^2 + 2$

35) $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} > x + \frac{1}{3}$

* مجموعه جواب نامعادلات توام زیر را به دست آورید.

$$36) \begin{cases} x - 2 < 6x + 4 \\ 2x < \frac{x + 7}{3} \end{cases}$$

$$37) \begin{cases} 2x - 1 < 3(x - 1) \\ x + 1 > \frac{x}{3} - 1 \end{cases}$$

$$38) \begin{cases} 2x + 5 > 5x - 4 \\ x - 7 < 2x - 3 \end{cases}$$

$$39) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > \frac{1}{3} \\ \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 5 \end{cases}$$

$$40) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{2} < 1 \\ 2x - 1 < \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$41) \begin{cases} 10 - 5x < 0 \\ \frac{x}{2} + 2 > x \end{cases}$$

$$42) \begin{cases} \frac{x + 3}{2} - \frac{(x - 1)}{5} < \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3} - \frac{(2x - 1)}{2} < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$43) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < \frac{5}{6} \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} < \frac{1}{2} \end{cases}$$