فصل ششم

۱- معـادلـه

تساوی که برحسب یک تغییر نوشته می‌شود و می‌تواند برای بعضی از مقادیر برقرار باشد را یک ***معادله*** گویند. مقـدار نامعلوم (متغیر) را مجهول معادله و یافتن مجهول را ***حل معادله*** می‌نامند.

✓ برای حل معادلات از دو قانون مهم که در تساوی‌ها برقرار است استفاده می‌کنیم :

۱) جمع (کم کردن) طرفین تساوی با مقدارهای مساوی

۲) ضرب (تقسیم) طرفین تساوی در (بر) مقدارهای مساوی مخالف صفر.

با انجام عملیات جبری با توجه دو قانون بالا و محاسبات معمولی می‌توان به معادله‌ای رسید که مجهول در یک طرف و مقدار معلوم در طرف دیگر قرار گیرد. در اینجا ***مقدار مجهول معادله*** به دست می‌آید.

- **مثـال :**

۱- معادله‌ی $\frac{3}{4}(x-1)=\frac{1}{3}(2-x)$ را حل کنید.

پاسخ : طرفین معادله را در عددی ضرب می‌کنیم که هر دو طرف از حالت کسری خارج شوند این عدد کوچکترین مضرب مشترک عددهای ۳ و ۴ یعنی ۱۲ خواهد بود.

$$12\left[\frac{3}{4}(x-1)\right]=12\left[\frac{1}{3}(2-x)\right] \quad \rightarrow \quad 9(x-1)=4(2-x)$$

$$9x-9=8-4x \quad \rightarrow \quad 9x+4x-9+9=8-4x+4x+9 \rightarrow 13x=17 \quad \rightarrow \quad \boxed{x=\frac{17}{13}}$$

۲- معـادلات هـم ارز:

اگر از یک معادله با اعمال تعریف شده بتوان به معادله‌ی دیگری رسید، این ***معادلات هم ارز*** خواهند بـود. بـه عبـارت دیگر دو معادله از یک درجه که جواب‌های یکسانی داشته باشند ***هم ارز*** هستند.

- **مثـال :**

۲- نشان دهید دو معادله‌ی $2x-7=17$, $3x-10=26$ هم ارز هستند.

پاسخ : با اعمال مجاز در طرفین معادله بتوانیم از یک معادله به معادله‌ی دیگر برسیم.

$$2x-7=17 \quad \rightarrow 2x=24 \quad \rightarrow x=12$$

$$\rightarrow 3x=36 \quad \rightarrow 3x-10=36-10 \rightarrow 3x-10=26$$

۳- رابطــه‌ی خطی و شیب :

برخی از پدیده‌ها با هم رابطه دارند. قد و وزن شما، نمره و میزان درس خواندن شما ، سرعت و مسافت یک متحــرک ، طول عمر و میزان وزن و . . .

برای نمایش رابطه‌ها بین دو متغیر یکی را x می‌گیریم با افزایش یا کاهش این متغیــر مقــدار متغیــر دیگــر y تعیــین می‌گردد. متغیر اول را *مستقل* و متغیر دوم را *وابسته* می‌گویم . در هر رابطه ، نوشتن معادله‌ی بــین ایــن دو متغیــر نقــش عمده‌ای در *بررسی رابطه* دارد.

- مثــال :

۳- برای هریک از روابط زیر، معادله‌ای وجود دارد ؛ آن را بنویسید.

الف) قیمت هر پیراهن ۷۰۰۰ تومان است. رابطه‌ی بین تعداد پیراهن‌ها و قیمت آنها را C می‌نامیم.

ب) k هزینه‌ی دعوت و میهمانی a بزرگسال و b کودک به یک جشن است. در صورتیکه هزینه‌ی ورودی بزرگســال ۵۰۰۰ تومان و هزینه‌ی بلیط هر کودک ۲۰۰۰ تومان باشد.

پاسخ :

الف) فرض کنیم تعداد پیراهن‌ها x باشد. هزینه‌ی پیراهن‌ها برابر است. $C = 7000x$

ب) $k = 5000\ a\ + 2000\ b$

۴- اگر x طول ضلع یک مربع و y مقدار مساحت آن باشد.

الف) رابطه‌ی بین x , y به صورت یک معادله بنویسید.

ب) نمودار رابطه‌ی قسمت (الف) را رسم کنید. برای این کار از جدول زیر کمک بگیرید.

ج) آیا با افزایش مقدار x ، مقدار y به اندازه‌ی ثابت زیاد می‌شود ؟ چرا ؟

پاسخ :

الف) $y = x^2$

ب) برای رسم رابطه با استفاده از جدول زیر نقاط را یافته و به هم وصل می‌کنیم.

X	۰	۱	۲	۳	۴
y	۰	۱	۴	۹	۱۶

ج) این نسبت ثابت نخواهد بود ؛ مثلاً در مرحله‌ی $x = 2$ داریم $\frac{4}{2} = 2$ =نسبت مساحت به ضلع

اگر $x = 4$ نسبت مساحت به ضلع برابر : $\frac{16}{4} = 4$ است.

روابطی که نسبت افزایش یا کاهش یک متغیر نسبت به متغیر دیگر مقدار ثابتی باشد آن را رابطه خطی گویند. به عبارت دیگر نمودار متناظر روابط خطی به صورت یک خط راست خواهد بود. در مثال مربوط به مساحت و ضلع یک مربع رابطه‌ی مورد نظر خطی نیست در صورتیکه رابطه‌ی بین هزینه‌ی پیراهن‌ها رابطه خطی است.

چگونه می‌توانیم تشخیص دهیم یک رابطه خطی است یا نه ؟

الف)با رسم نمودار رابطه: اگر نمودار آن به صورت یک خط راست باشد، رابطه خطی است.

ب) رابطه خطی: با به دست آوردن نسبت افزایش (کاهش) دو متغیر نسبت به هم ، اگر این نسبت ثابت باشد ، رابطه خطی است.

- مثال :

۵- از روابط زیر، کدام‌ها خطی و کدام‌ها غیرخطی هستند ؟

الف) رابطه‌ی بین ساعت‌های کار یک کارگری که ساعتی ۲۰۰۰ تومان دستمزد می‌گیرد و دستمزدی که می‌گیرد.

ب) تانکری با سرعت ۳۰ لیتر بر دقیقه پر می‌شود. رابطه‌ی بین مقدار حجم تانکر به لیتر بر حسب زمان.

ج) یک نوزاد که وزنش در بدو تولد ۳ کیلوگرم است در سال اول تولد هر ماه وزنش ۱/۲ برابر ماه قبل است. رابطه‌ی بین وزن کودک و ماه تولد او.

پاسخ :

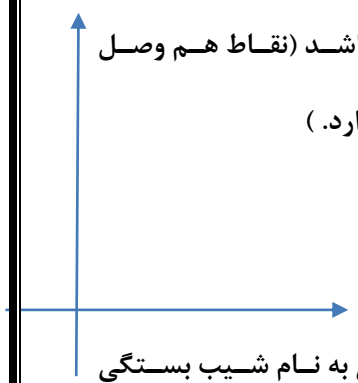
الف) خطی است. $y = 2000\,x$ (x ساعت کار کارگر و y میزان کل دستمزد)

ب) خطی است . $y = 30\,x$ (x زمان برحسب دقیقه و y حجم مایع درون تانکر برحسب لیتر است.)

ج) خطی نیست. به جدول زیر توجه شود، فرض کنیم در بدو تولد نوزاد ۳ کیلو وزن دارد.

ماه	۰	۱	۲	۳	۴
وزن	۳	۳/۶	۴/۳۲	۵/۱۸۴	۶/۲۲

با رسم نقاط متناظر در جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که نمودار حاصل نمی‌تواند یک خط راست باشد (نقاط هم وصل می‌شوند زیرا وزن یک متغیر پیوسته است یعنی در هر زمان یک عددی برای وزن کودک وجود دارد.)



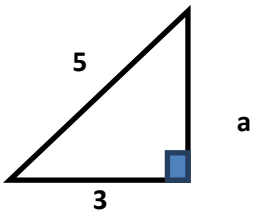
۴- شیب :

میزان مقدار افزایش ارتفاع به مقدار مسافت افقی را یب گوئیم.

بالا رفتن از سربالایی‌ها آسان‌تر از بعضی دیگر است. این موضوع به ویژگی خاصی از سربالایی به نام شیب بستگی دارد.

• **مثـال :**

۶- نردبانی به طول ۵ متر به دیواری تکیه داده شده که فاصله‌ی نردبان از پای دیوار برابر ۳ متر است. شیب این نردبـان را پیدا کنید.



پاسخ :

$$a^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$\text{شیب} = \frac{a}{3} \rightarrow \text{شیب} = \frac{4}{3}$$

۷- در هر شکل شیب را به دست آورید :

پاسخ :

$\text{شیب اسکی باز} = \frac{20}{60} = 0/33$ $\qquad$ $0 = \text{شیب پرواز افقی تعریف نشده} = \text{شیب دکل عمودی}$

۸- شیب هریک از نواحی زیر را بدست آورید.

پاسخ :

الف) $2 = 0/0 = \frac{12}{60} = \frac{1/2}{60} = \text{شیب}$ $\qquad$ **ب)** صفر = شیب $\qquad$ **ج)** $2 = 0/0 = \frac{400}{2000} = \text{شیب}$

۵- شـیبخـــط :

شیب خط به صورت نسبت تفاضل عرض‌های دو نقطه‌ی آن بر تفاضل طول‌های متناظر همان نقطه تعریف می شود.

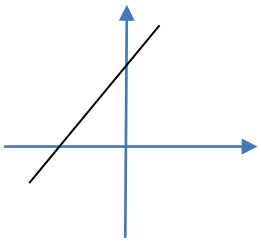
بنابراین شیب خط گذرنده بر دو نقطه‌ی A و B را با m نشان داده و داریم :

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

توجـــه ۱ : می‌توانیم شیب خط گذرنده بر A و B را از رابطه‌ی $m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ به دست آوریم.

• **مثـال :**

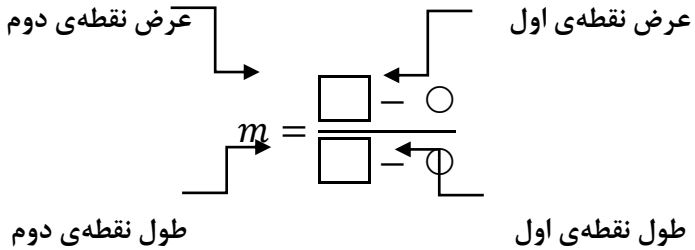
۹- به کمک نمودار مقابل شیب خط L را پیدا کنید.



پاسخ : از روی شکل واضح است که دو نقطه‌ی $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ **روی خط هستند.**

بنابراین : $m_L = \frac{3-0}{0-(-2)} = \frac{3}{2}$

توجـــه ۲ : در محاسبه‌ی شیب خط باید دقت کنید که جای‌گذاری‌ها به طور درست انجام شـود یعنـی اگـر ابتـدا در صورت عرض یک نقطه را نوشتیم در مخرج ابتدا باید طول همان نقطه نوشته شود.



• مثـال :

۱۰- شیب خطی را که از دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{4}\end{bmatrix}$ عبور می‌کند چیست ؟

پاسخ :

$$m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-\frac{3}{4}-4}{\frac{1}{2}-(-5)}=\frac{-\frac{3}{4}-4}{\frac{1}{2}+5}\times\frac{4}{4}=\frac{-3-16}{2+20}=\frac{-19}{22}$$

برای ساده‌تر شدن، صورت و مخرج را در 4 ضرب می‌کنیم.

توجـــه ۳ : اگر شیب یک خط منفی باشد یعنی با افزایش طول نقاط عرض نقاط کاهش پیدا می‌کند و اگر شیب مثبت باشد یعنی با افزایش طول نقاط عرض نقاط نیز افزایش پیدا می‌کند. و این یعنی زاویه‌ی خطی که شیب مثبت داردبا محور ox از 90° کمتر و زاویه‌ی خطی که شیب منفی دارد با محور ox از 90° بیشتر است.

۶- معـــادلـــه‌ی خـــط :

✍ رابطه‌ی خطی بین دو متغیر x , y به صورت $y = mx + b$ نوشته می‌شود که در آن m , b اعداد حقیقی هســتند. اگر نمودار این رابطه را در دستگاه مختصات رسم کنیم یک خط راست دیده می‌شود بنابراین رابطــه‌ی $y = mx + b$ را معادله‌ی خط راست یا به طور خلاصه معادله‌ی خط می‌نامیم.

📄 توجـــه ۴ : برای رسم یک خط با معادله‌ی $y = mx + b$ کافی است دو نقطه از آن پیدا کرده و آنها را به هــم وصــل کنیم و امتداد دهیم.

✓ روش نوشتن معادله‌ی خط (شیب – نقطه) :

✍ معادله‌ی خطی که شیب آن m باشد و از نقطه‌ی $A\ \begin{bmatrix} x_\circ \\ y_\circ \end{bmatrix}$ عبور کند از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید .

$$y - y_\circ = m(x - x_\circ)$$

• مثــال :

۱۱- معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ با شیب (۱-) می‌گذرد چیست ؟

پاسخ :

$$\begin{vmatrix} A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ m = -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{y - y_\circ = m(x - x_\circ)} y - 4 = -1[x - (-2)] \rightarrow y - 4 = -x - 2 \rightarrow y = -x + 2$$

✓ روش نوشتن معادله‌ی خط (دو نقطــه) :

✍ **<u>روش اول</u> :** به کمک دو نقطه می‌توان شیب خط را پیدا کرد و به این ترتیب با داشتن شیب و یکی از نقاط مســأله بــه حالت قبل (شیب – نقطه) تبدیل می‌شود.

• مثــال :

۱۲- معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند چیست ؟

پاسخ :

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 1}{1 - 2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ m = -1 \end{cases} \xrightarrow{y - y_\circ = m(x - x_\circ)} y - 1 = -1(x - 2) \rightarrow y = -x + 3$$

📄 توجـــه ۵ : در مثال فوق به جای نقطه‌ی A می‌توانستیم از نقطه‌ی B استفاده کنیم.

روش دوم : می‌توانیم با در نظر گرفتن نقاط $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ ، $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ ، $C\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ شرط $m_{AB}=m_{BC}$ را بنویسیم. در ایـن صورت سه نقطه‌ی A ، B ، C روی یک خط راست قرار می‌گیرند و معادله‌ی خط گذرنده بر ۲ نقطه‌ی A و B نوشته می‌شود.

• مثـال :

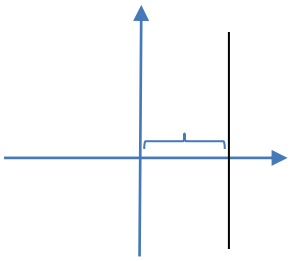
۱۳- مثال قبل را با این روش حل می‌کنیم.

پاسخ :

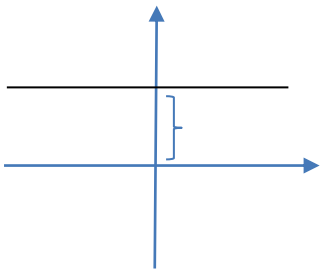
$$A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\ ,\quad B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\ ,C\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\xrightarrow{m_{AB}=m_{BC}}\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}$$

$$\rightarrow\ \frac{2-1}{1-2}=\frac{y-2}{x-1}\ \rightarrow\ \frac{1}{-1}=\frac{y-2}{x-1}\rightarrow -y+2=x-1\ \rightarrow\ y=-x+3$$

توجـــه ۶ : معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $\boldsymbol{A\begin{bmatrix}a\\y_A\end{bmatrix}}$ ، $\boldsymbol{B\begin{bmatrix}a\\y_B\end{bmatrix}}$ عبور می‌کند به صورت $\boldsymbol{x=a}$ است. چنین خطـی را خط عمودی گویند و طول همه‌ی نقاط روی آن عدد ثابت $\boldsymbol{a}$ است.



توجـــه ۷ : معادله‌یخطی که از دو نقطه‌ی $\boldsymbol{A\begin{bmatrix}x_A\\b\end{bmatrix}}$ ، $\boldsymbol{B\begin{bmatrix}x_B\\b\end{bmatrix}}$ عبور می‌کند به صورت $\boldsymbol{y=b}$است. چنـین خطـی را خط افقی گویند و عرض همه‌ی نقاط روی ان عدد ثابت $\boldsymbol{b}$ است.



توجـــه ۸ : شیب خطوط افقی برابر صفر و شیب خط‌های عمودی تعریف نشده است.

توجـــه ۹ : اگر دو خط موازی باشند شیب‌های برابر دارند و برعکس.

• مثـال :

۱۴- معادله‌ی خطی بنویسید که موازی خط $y=2x+5$ باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض (۱-) قطع کند.

پاسخ :

چون خط مورد نظر محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض (۱-) قطع کرده است پس $A\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ و چون موازی خط $y=2x+5$ است، $m=2$ پس :

$$\begin{cases} m=2 \\ A\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{y-y_\circ=m(x-x_\circ)} y+1=2(x-0) \rightarrow y=2x-1$$

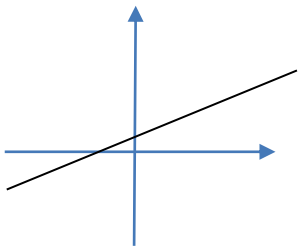
توجه 10 : اگر نقطه‌ای روی خط L به معادله‌ی $y=mx+b$ قرار داشته باشد مختصات آن در معادله صدق می‌کند. (یعنی با قرار دادن x , y در رابطه‌ی $y=mx+b$ تساوی بر قرار می‌شود.)

• مثال :

15- نمودار خط به معدله‌ی $y=2x-1$ را رسم کنید.

پاسخ : کافی است دو نقطه از این خط را پیدا کنیم بنابراین به x دو مقدار دلخواه می‌دهیم و y متناظر آنها را پیدا می‌کنیم.

x	0	۱
$2x-1$	$2(0)-1$	$2(1)-1$
y	-1	1
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$



۱۶- اگر نقطه‌ی $A\begin{bmatrix}a+3\\-2\end{bmatrix}$ روی خط $y=2x+4$ قرار داشته باشد، مقدار a را پیدا کنید.

پاسخ : چون نقطه روی خط راست باید مختصات آن در معادله‌ی خط صدق کند، پس :

$$A\begin{bmatrix}a+3\\-2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}x=a+3\\y=-2\end{vmatrix} \xrightarrow{y=2x+4} -2=2(a+3)+4 \xrightarrow{\div 2} 1=a\overbrace{+3+2}^{5} \Rightarrow a=-1-5 \Rightarrow a=-6$$

در معادله‌ی خط $y=mx+b$ عدد m (ضریب x) شیب خط است.

۱۷- شیب هریک از خطوط زیر را به کمک معادله‌ی خط پیدا کنید.

الف) $L: y=3x-5$ ب) $D: 2x-3y=4$

پاسخ :

الف) معادله‌ی L به صورت $y=mx+b$ است پس شیب خط همان ضریب x است یعنی $m_L=3$

ب) معادله‌ی خط D به صورت $y=mx+b$ نیست پس ابتدا آن را به این شکل تبدیل کرده و شیب را به کمک توضیحات فوق به دست می‌آوریم :

$$2x-3y=4 \Rightarrow -3y=-2x+4 \xrightarrow{\div(-3)} y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} \Rightarrow m_D=\frac{2}{3}$$

توجـــه ۱۱ : در معادلات خطی که به صورت $ax + by = c$ یا $ax + by + c = o$ هستند شیب خـط از رابطـه‌ی زیر به دست می‌آید : $\text{شیب خط} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{b}$

۷- خطـــوط عمـــود بـر هـم :

شرط عمود بودن دو خط : خط‌های L , L' بر هم عمودند هرگاه شیب یکی قرینه و معکوس شیب دیگـری باشـد. بـه عبارت دیگر حاصل ضرب شیب‌هایشان ۱- باشد. به زبان ریاضی :

$$L \perp L' \Leftrightarrow m_L \cdot m_{L'} = -1$$

یا اینکه :

$$L \perp L' \Leftrightarrow m_L = -\frac{1}{m_{L'}}$$

- مثـال :

۱۸- فرض کنیم : $D : y = 2x - 1$

الف) شیب خط عمود بر خط D چیست ؟

ب۹ معادله‌ی خطی بنویسید که بر خط D عمود باشد و از نقطه‌ی $A\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$ عبور کند.

پاسخ :

الف) می‌دانیم $m_D = 2$ پس اگر L بر D عمود باشد : $m_L = -\frac{1}{m_{L'}} = -\frac{1}{2}$

ب) برای نوشتن معادله‌ی خط L داریم :

$$\begin{cases} m_L = -\frac{1}{2} \xrightarrow{y-y_\circ=m(x-x_\circ)} y - 3 = -\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \\ A\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} \end{cases}$$

۸- فـاصلـه بین دو نقطـه :

الف)روی محور : اگر A نقطه‌ی نظیر عدد a روی محور اعداد باشد، عدد a را طول نقطه‌ی A گویند و با نماد x_A آن را نمایش می‌دهیم.

- مثـال :

۱۹- طول هریک از نقاط زیر را مشخص کنید.

$$x_A = -1 \qquad x_B = 2 \qquad x_C = 4 \qquad x_D = -4$$

پاسخ : فاصله‌ی دو نقطه : فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B روی محور اعداد از رابطه‌ی $|x_B - x_A|$ به دست می‌آید و آن را طول پاره‌خط AB گوئیم.

۲۰- در مثال ۱۹ طول هریک از پاره‌خط‌های AB و BD و BC و CD را پیدا کنید.

پاسخ :

$$\text{طول پاره خط } \boldsymbol{AB} = |x_B - x_A| = |2-(-1)| = |2+1| = 3$$

$$\text{طول پاره خط } \boldsymbol{BD} = |x_D - x_B| = |-4-2| = |-6| = 6$$

$$\text{طول پاره خط } \boldsymbol{BC} = |x_C - x_B| = |4-2| = |2| = 2$$

$$\text{طول پاره خط } \boldsymbol{CD} = |x_D - x_C| = |-4-4| = |-8| = 8$$

توجـــه ۱۲ : طول پاره‌خط AB و BA با هم برابر است یعنی $|x_B - x_A| = |x_A - x_B|$

ب)در صفحـــه : اگر $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$, $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ در صفحه‌ی مختصات باشند طول پاره‌خط AB از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- **مثـال :**

۲۱- اگر $O\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, $B\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$ سه رأس مثلث OBA باشند مطلوب است.

الف) طول هریک هز اضلاع مثلث ب) نوع مثلث ج) مساحت مثلث

پاسخ :

(الف

$$O\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \Rightarrow OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$O\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, B\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} \Rightarrow OA = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$A\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, B\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} \Rightarrow OA = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

ب)

$$\text{محیط مثلث } OAB = OA + OB + AB = 5 + 4 + 3 = 12$$

ج) چون سه عدد ۳ و ۴ و ۵ در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کنند $(5^2 = 3^2 + 4^2)$ پس مثلث قائم الزاویـــه اســـت. OA وتر و OB و AB اضلاع زاویه‌ی قائمه هستند (چون وتر بزرگترین ضلع است)

د)

$$\text{مساحت مثلث قائم الزاویه} = \frac{1}{2}\left(\text{حاصل ضرب دو ضلع زاویه ی قائمه}\right) = \frac{1}{2} \times (3 \times 4) = 6$$

۹- دستگاه معادلات خطی دو مجهولی :

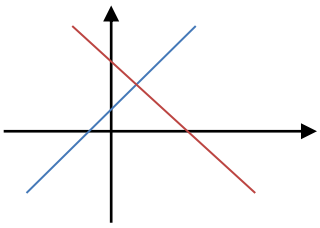
دستگاه معادلات : همانطور که از قبل می‌دانیم، هریک تساوی با یک یا چند مجهول یک معادله نامیده می‌شود. اگر معادله دارای یک مجهول باشد، قابل حل است که با حل آن نیز آشنا شدیم. حال اگر معادله دارای بیش از یک مجهول باشد، برای پیدا کردن مجهولات به بیش از یک معادله نیاز داریم که به معادلات داده شده دستگاه معادلات می‌گوئیم.

دستگاه معادلات خطی دو مجهولی : در حالتی که دو مجهول داشته باشیم، به دو معادله نیاز داریم، اگر در این معادله‌ها رابطه‌ی بین x , y خطی باشد به این معادلات دستگاه معادلات خطی دو مجهولی می‌گوئیم.

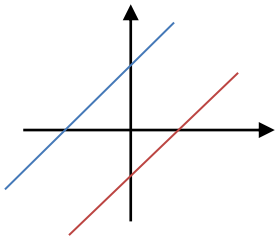
در واقع جواب این دستگاه نقطه‌ی برخورد دو خطی است که معادله‌ی آنها داده شده است.

بنابراین سه حالت ممکن است در مورد دستگاه $\begin{cases} y = mx + b \\ y = m'x + b' \end{cases}$ ، اتفاق بیفتد :

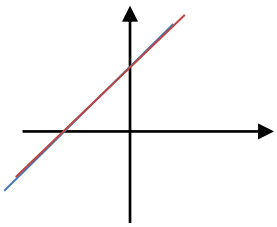
۱- اگر دو خط یکدیگر را قطع کنند دستگاه دارای یک جواب است.



۲- اگر دو خط موازی باشند ، دستگاه جواب ندارد .



۳- اگر دو خط بر هم منطبق باشند، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.



۱۰- روش‌های حل دستگاه معادلات خطی دو مجهولی :

روش‌های حذفی : در این روش ابتدا طرفین یک یا هر دو معادله‌ی دستگاه را در عددی ضرب می‌کنیم که ضریب‌های یک مجهول در دو معادله قرینه شوند، سپس طرفین دو معادله را با هم جمع می‌کنیم، به این ترتیب معادله‌ای حاصل می‌شود که با حل آن یکی از مجهول‌ها به دست می‌اید. با جایگذاری این مجهول در یکی از معادلات مجهول دیگر را نیز به دست می‌آوریم.

- مثال :

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y + x = 3 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} y - 2x = 0 \\ 2y + 2x = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادله}} 3y = 6 \rightarrow y = 2 \xrightarrow[\underbrace{x+y=3}]{\text{جایگذاری}} 2 + x = 3 \rightarrow x = 1$$

روش‌های جایگذاری : در این روش یکی از مجهولات را از معادله‌ای که ساده‌تر است برحسب مجهول دیگر محاسبه می‌کنیم، سپس آن را در معادله‌ی دیگر دستگاه جایگزین می‌کنیم، در این صورت معادله‌ای با یک مجهول حاصل می‌شود که با حل آن آشنایی داریم به این ترتیب یکی از مجهولات به دست می‌اید و با جایگذاری آن در معادله‌ی دیگر، مجهول دیگر را نیز به دست می‌آوریم.

- مثال :

۲۲- دستگاه قبل را با این روش حل می‌کنیم :

$$\begin{cases} y-2x=0 \implies y=2x \quad (1) \\ y+x=3 \xrightarrow{(1)} 2x+x=3 \implies 3x=3 \implies x=1 \xrightarrow[x+y=3]{\text{جایگذاری}} y+1=3 \implies y=3-1=2 \end{cases}$$

توجه ۱۳ : هرگاه دو نقطه از خط معلوم باشند معادله‌ی خط مربوطه را می‌توانیم به کمک دستگاه معادلات خطی به دست آوریم. به این صورت که اگر $A\begin{bmatrix}x_A\\y_A\end{bmatrix}$, $B\begin{bmatrix}x_B\\y_B\end{bmatrix}$ دو نقطه از خط AB به معادله‌ی $y=mx+b$ باشند، با توجه به اینکه نقاط A و B روی خط واقع‌اند داریم :

$$y_A = mx_A + b \quad , \quad y_B = mx_B + b$$

بنابراین با تشکیل دستگاه $\begin{cases} mx_A+b=y_A \\ mx_B+b=y_B \end{cases}$، (m , b مجهول‌اند) مقادیر m , b به دست می‌آیند. به این ترتیب معادله‌ی خط حاصل را می‌نویسیم.

۱۱–محتوی تکمیلی:

مختصات وسط یک پاره خط برحسب مختصات دو سر آن :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_m = \dfrac{x_1+x_2}{2}} \\ \boldsymbol{y_m = \dfrac{y_1+y_2}{2}} \end{cases}$$

معادله‌ی خطی که طول از مبدأ آن **P** و عرض از مبدأ آن $\boldsymbol{q}$ است به صورت $\frac{y}{q}+\frac{x}{q}=1$ است.

- مثال :

۲۳- معادله‌ی خطی را بنویسید از نقطه‌ی $\left(2-\text{ و }6\right)$ بگذرد و مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن ۵ باشد.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{P}+\dfrac{y}{q}=1 \\ P+q=5 \end{cases} \implies \frac{x}{P}+\frac{y}{q}=1 \rightarrow \frac{x}{P}+\frac{-2}{5-P}=1 \rightarrow P^2-13P+30=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} P=3 \ \rightarrow \ q=2 \ \Longrightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \ \rightarrow 2x+3y=6 \\ P=10 \ \rightarrow \ q=-5 \ \Longrightarrow \frac{x}{10}+\frac{y}{-5}=1 \ \rightarrow x-2y=10 \end{cases}$$

فاصله نقطه $(x_\circ , y_\circ)$ از خط $Ax+By+C=o$ از فرمول $C=\frac{|Ax_\circ+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ به دست می‌آید.

- **مثـال :**

۲۴- فاصله نقطه $A(2,-3)$ از خط $3x-4y+2=0$ چقدر است ؟

$$d=\frac{|3\times 2-4\times(-3)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|20|}{\sqrt{25}}=\frac{20}{5}=4$$

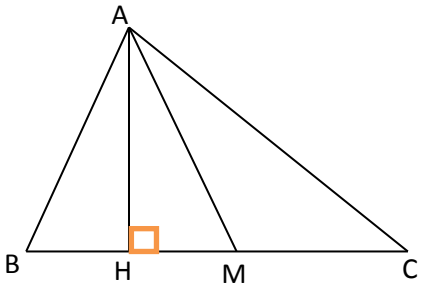
فاصله‌ی دو خط موازی $D_1 : Ax+By+C=o$, $D_2 : A'x+B'y+C'=o$ از فرمـول $d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ به دست می‌آید.

- **مثـال :**

۲۵- فاصله‌ی دو خط موازی $D_1 : 3x+4y+1=0$, $D_2 : 6x+8y-8=0$ را به دست آورید.

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2-(-8)|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{10}{\sqrt{100}}=\frac{10}{10}=1$$

۲۶- اگر $A(-2,3)$, $B(4,-4)$, $C(-4,2)$ سه رأس یک مثلث باشند :



الف) معادله‌ی میانه‌ی AM را بنویسید.

ب) معادله‌ی ارتفاع AH را بنویسید.

ج) فاصله‌ی نقطه‌ی A تا ضلع BC را بدست آورید.

د) مساحت مثلث را حساب کنید.

پاسخ : الف)

$$\left.\begin{aligned} x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{4+(-4)}{2}=0 \\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=-1 \end{aligned}\right\} \ \rightarrow \quad m(0,-1)$$

$$m_{AM}=\frac{3-(-1)}{-2-0}=\frac{4}{-2}=-2$$

$$AM: \ y+1=-2\,(x-0) \ \rightarrow y=-2x-1$$

ب)

$$m_{BC} = \frac{-4-2}{4+4} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad m_{BC} = \frac{4}{3}$$

$$AH: y-3 = \frac{4}{3}(x+2) \;\rightarrow\; y-3 = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$$

$$AH: 4x - 3y + 17 = 0$$

ج)

$$m_{BC} = \frac{-3}{4}$$

$$BC: y+4 = -\frac{3}{4}(x-4) \;\rightarrow\; y+4 = \frac{-3}{4}x + 3$$

$$y + \frac{3}{4}x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x + 4y + 4 = 0$$

د)

$$AH: \frac{|3\times(-2) + 4\times 3 + 4|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-6+12+4|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$BC: \sqrt{\big(4-(-4)\big)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

$$S_{(ABC)} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{20\times 10}{2} = 10$$

۱- معـــــادلـــه :

❁معادلات زیر را حل کنید.

1) $x - 2\,(1 - x) = 3$

2) $\frac{x+1}{8} - \frac{2x+3}{6} = \frac{x-3}{4}$

3) $\frac{2x+1}{4} - \frac{3x+1}{3} = \frac{5}{6}$

4) $\frac{2x-1}{5} - \frac{x}{4} = \frac{x+1}{2}$

5) $\frac{x-3}{4} + x = \frac{x}{3}$

6) $\frac{x-1}{2} - \frac{x}{3} = 4$

7) $\frac{x+2}{3} - \frac{x}{6} = \frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{4}$

8) $3(x-1)^2 + (x-2)^2 = 4x^2 - 6$

۹- مجموعه سه عدد فرد متوالی ۵۲ باشد آن اعداد را بیابید.

۱۰- مجموع سه عدد زوج متوالی ۷۲ می‌شود. اعداد را بیابید.

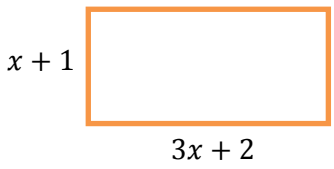
۱۱- مجموع سه عدد طبیعی متوالی ۶ می‌شود، آن اعداد را بیابید.

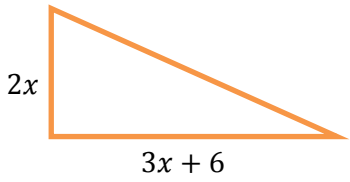
۱۲- عددی طبیعی چنان بیابید که چهار برابر آن از نصف آن عدد ۷ واحد بیشتر باشد.

۱۳- مجموع سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۳ ، برابر ۴۵ است. این سه عدد را بیابید.

۱۴- اندازه‌ی طول مستطیلی سه برابر اندازه‌ی عرض آن است. اگر محیط مستطیل ۲۴ باشد، مساحت آن را بیابید.

۱۵- مقدار x را طوری بیابید که مساحت مثلث و مساحت مستطیل زیر باهم برابر شوند.





۱۶- مقدار m را طوری تعیین کنید که دو معادله‌ی $4x+1=6x+9$, $\frac{x+m}{2}+4=m$ هم ارز باشند.

۱۷- بلیط تئاتری برای بزرگسالان ۴۰۰ تومان و برای دانش‌آموزان نصف قیمت بزرگسالان است. اگر تعداد ۸۱۰ بلیط مجموعاً به قیمت ۲۸۳۲۰۰ تومان فروخته شود، مشخص کنید از هر نوع بلیط چند عدد فروخته شده است ؟

۱۸- از تعداد بیسکویتی که علی داشت نیمی را به مادرش و نیم بقیه را به برادرش و نیم باقیمانده را به پدرش داد. $\frac{2}{5}$ بقیه را نیز خواهرش از او گرفت. حالا او ۳ عدد بیسکویت دارد. تعداد بیسکویت‌های اولیه‌ی او چند تا بوده است ؟

۲- معـــــادلـــه خـــــط :

۱۹- خطوط زیر را در دستگاه‌های جداگانه رسم نمائید.

الف) $y = 2x - 7$ ب) $y = \frac{x}{2} + 3$

ج) $3x + 2y = 6$ د) $y + x = 3$

۲۰- کدامیک از نقاط زیر روی خط $4y + 2x = 6$ قرار دارد و کدامیک روی خط $y + 2x - 3 = o$ است.

1) $\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ ۲) $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ ۳) $\begin{vmatrix} ۰ \\ \frac{3}{2} \end{vmatrix}$ ۴) $\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$

۲۱- شیب و عرض از مبدأ خطوط زیر را تعیین کنید.

الف) $y = -4x + 3$ ب) $2y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

ج) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=2$ د) $\frac{4x+y}{2}=\frac{2y-x}{3}$

۲۲- خط $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$ محورهای مختصات را در نقاط **A** و **B** قطع می‌کند، مساحت مثلث **OAB** را بدست آورید.

۲۳- به ازای چه مقداری از **m** شیب خط $mx+(m-1)y+2=o$ برابر **۲** است ؟

۳- نوشتن معادله خط با شیب یک نقطه :

۲۴- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{vmatrix}-2\\o\end{vmatrix}$ گذشته و شیب آن ۳- باشد.

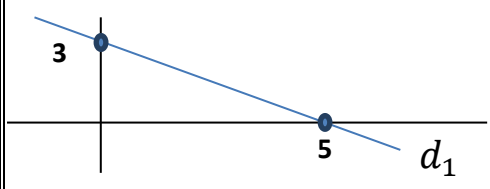
۲۵- معادله‌ی خطی را بنویسید که عرض از مبدأ آن ۳ ، و شیب آن ۱- باشد.

۲۶- معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۷ بوده و محور **y** ها را در نقطه ۳- قطع کند.

۴- نوشتن معادله خط با معلوم بودن دو نقطه :

۲۷- معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه $\begin{vmatrix}-1\\3\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}o\\4\end{vmatrix}$ بگذرد.

۲۸- معادله‌ی خط d_1 را بنویسید.



۵- خطـــوط مـــوازی :

۲۹- معادله‌ی خطی را بنویسید که محور x ها را در نقطه ۳ قطع کرده و موازی خط $2x - 3y = 5$ باشد.

۳۰- به ازای کدام مقدار a ، خط $ax + 2y + 3 = o$:

الف) موازی خط $x - 3y + a = o$ است.

ب) با خط $3(x + y) - (2a + 1)x = 4$ موازی است.

۳۱- معادله‌ی خطی را بنویسید که موازی نیمساز ربع ۲ و ۴ بوده و از نقطه $\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ بگذرد.

۳۲- الف) به ازای کدام مقدار m ، خط $(m - 1)x + (m + 2)y + m = o$ موازی محور y ها است ؟

ب) به ازای کدام مقدار m ، خط $(2m - 1)x + (m + 2)y = 5$ موازی محور x ها است ؟

۳۳- a را چنان تعیین کنید که خط $(a - 1)x + (2a + 3)y = 3$

الف) موازی محور طول‌ها باشد.

ب) موازی oy باشد.

۳۴- معادله‌ی خطی را بنویسید که نقطه‌ای به عرض ۳ روی خط $3x + y = 6$ می‌گذرد و

الف) موازی محور x ها است ؟

ب) موازی با خط $x = -1$ است.

۶- خطـــوط عمــود بر هــم :

۳۵- به ازای کدام مقدار m ، خط $(m-1)x + 3y = 5$ بر خط $6x + y = m$ عمود است ؟

۳۶- به ازای کدام مقدار m خط گذرا از دو نقطه $\begin{vmatrix} -1 \\ o \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} m \\ 1 \end{vmatrix}$ بر خط $y + 2x + 1 = o$ عمود است ؟

۳۷- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ گذشته برخط $3x + y = 5$ عمود است ؟

۳۸- معادله‌ی خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن ۲- بوده و برخط $x + 2y = 1$ عمود باشد.

۳۹- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ می‌گذرد :

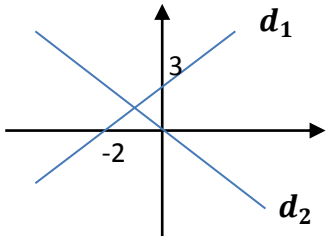
الف) عمود بر نیمساز ربع اول و سوم است .

ب) عمود برخط $x = 1$ است.

ج) عمود بر محور y ها است.

د) موازی خط $x = 3$ است.

۴۰- معادله‌ی خطوط d_1 , d_2 را بنویسید.



۷- دستگـاه معـــادلات خطـی :

۴۱- دستگاه‌های زیر را به روش حذفی و یا جایگذاری حل کنید.

الف) $\begin{cases} 11x + 9y = -5 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \frac{m}{2} + n - 3 = 0 \\ \frac{3}{2}n = 2m + 10 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} \frac{x+y}{3} + \frac{y-x}{2} = 9 \\ \frac{x}{2} + \frac{x+y}{9} = 5 \end{cases}$

۴۲- معادله‌ی خطی را بنویسید که از محل تلاقی خطوط $5x + 2y = 2$, $3y - 2x = 1$ بگذرد و با :

الف) محور y ها موازی باشد.

ب) بر محور y ها عمود باشد.

ج) بر نیمساز ربع دوم و چهارم عمود باشد.

۴۳- هزینه بلیط تئاتر برای سه بزگسال و یک خردسال، ۱۵ هزار تومان و این هزینه برای یک بزرگسال و دو خرسال، ۱۰ هزار تومان است. اگر ۵ بزرگسال با ۲ خردسال با هم به تئاتر بروند، چه هزینه ای باید پرداخت کرد؟

۴۴- میانگین دو عدد ۲.۵ و تفاضل آنها نیز ۲.۵ است. این دو عدد را تعیین کنید.

۴۵- محیط قطعه زمینی به شکل مستطیل ۲۲۰ متر است. اگر یک سوم طول زمین، ۶ متر بزرگتر از عرض آن باشد. مساحت این زمین چقدر است؟

۸- فاصله دو نقطه :

۴۶- فاصله‌ی نقاط $A\begin{vmatrix}2\\5\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}-3\\4\end{vmatrix}$ **را بدست آورید.**

۴۷- اگر خط $12x+5y=6$ **محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، طول پاره‌خط AB چقدر است ؟**

۴۸- اگر نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}-2a+3\\a+1\end{vmatrix}$ **روی نیمساز ربع اول باشد. فاصله A از مبدأ چقدر است ؟**

۴۹- نقاط $A\begin{vmatrix}2\\o\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}1\\-3\end{vmatrix}$ **دو رأس غیر مجاور یک مربع هستند. مساحت مربع را بیابید.**

۵۰- نقاط $A\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}1\\4\end{vmatrix}$ **سه رأس مثلثی هستند. نوع این مثلث را مشخص کنید.**

۹- سـؤالات تکمیلـی :

۵۱- مقدار m **را چنان تعیین کنید که سه نقطه متمایز** $A(3,2)$, $B(m+1,m)$, $C(m^2,m+1)$ **بر یک اسـتقامت باشند.**

۵۲- m **را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی** $A(2,2)$ **روی خط به معادله‌ی** $mx+3y=4m$ **واقع باشد.**

۵۳- اگر عرض از مبدأ خط $(n+1)x+ny=2x+1$ **برابر** $\frac{-4}{3}$ **باشد :**

الف) مقدار n **را بیابید.**

ب) خط را رسم کنید.

۵۴- مقدار a **را چنان تعیین کنید که طول از مبدأ خط** $(a+2)x+ay=-3$ **مساوی عرض از مبدأ خط به معادلـه‌ی** $(2a-3)y+ax+1=o$ **باشد.**

۵۵- در متوازی الاضلاعی ABCD معادله‌ی ضلع BC عبارتست از $3x + y = 1$ و مختصات رأس A به صـورت $A(-2,1)$ می‌باشد، معادله‌ی ضلع AD را بنویسید.

۵۶- اگر $A(2\,,-3)$ ، $B(2m\,,-1)$ ، $C(m-1\,,3)$ سه رأس مثلث ABC باشند، را چنان تعیین کنید که $\hat{B} = 90^{\circ}$

۵۷- در مثلث به رأس‌های $A(1,2)$ ، $B(-2,3)$ ، $C(o,-4)$معادله‌ی ارتفاع وارد به ضلع BC را بنویسید.

۵۸- به ازای چه مقادیری از $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ خطوط $ax - 2y - 1 = o$ ، $6x - 4y - b = o$

الف) موازی‌اند ب) برهم عمودند. ج) در نقطه $M(2\,,1)$ متقاطع‌اند.

۵۹- نقطه $A(3m-2\,,4)$ روی نیمساز ربع اول و سوم و نقطه‌ی $B\ (2+n\,,3)$روی نیمساز ربع دوم و چهارم می‌باشد. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه $\boldsymbol{C}\ \left|\begin{matrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{m}\end{matrix}\right.$ گذشته و موازی خط $2x - y = 5$ باشد.

۶۰- فاصله‌ی محل تلاقی $y = 2x + 3$, $y = x + 3$ از مبدأ مختصات چیست ؟

۶۱- اگر $A\,(2\,,3)$, $B\,(2\,,-4)$, $C\,(o\,,6)$ ، آنگاه مختصات نقطه H پای ارتفاع ضلع BC را بدست آورید.

۶۲- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2}$ واقع بر خط بگذرد و با خط $3x - 2y = 5$ موازی باشد.

۶۳- معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی برخورد دو خط $2x - y = 2$, $\frac{x}{3} - \frac{2y}{5} + 5 = o$ بگذرد و با خط $x - y = \frac{x}{2} - \frac{2y}{5}$ موازی باشد.

۶۴- اگر فاصله‌ی نقطه $A\Big|_{3}^{m}$ از مبدأ مختصات برابر ۵ باشد، مقدار m ؟

۶۵- نقطه‌ای در ناحیه چهارم روی نیمساز ربع دوم و چهارم پیدا کنید که فاصله‌اش از مبدأ مختصات برابر ۲ باشد.

۶۶- محل برخورد دو خط به معادله‌های $y = x + 2$ ، $my = x + n$ روی محور x ها قرار دارد، n را بیابید.

۶۷- خط گذرنده از نقطه‌ی $A(2 , -1)$ و عمود برخط به معادله‌ی $2y + x = 4$ محـور y هـا را بـا کـدام عـرض قطـع می‌کند؟