مثال ۱ **حجم کره‌ای به شکل شعاع ۶ را محاسبه کنید.**

$$R=۶ \Rightarrow V=\frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳}=\frac{۴}{۳}\times ۳/۱۴\times ۶^{۳}=\frac{۲۷۱۲/۹۶}{۳}=۹۰۴/۳۲$$

مثال ۲ **با استفاده از گچ، یک کره به شعاع ۱۲ ساخته‌ایم که درون آن به‌اندازهٔ یک کره به شعاع ۶ خالی است. چه‌قدر گچ برای این کار استفاده کرده‌ایم؟ ($\pi=۳$)**

مقدار گچ استفاده‌شده، به‌اندازهٔ اختلاف دو کره با شعاع‌های ۱۲ و ۶ است:

$$\text{حجم کره با شعاع ۱۲}=\frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳}\xrightarrow{R=۱۲}\frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۱۲^{۳}=۴\times ۱۲^{۳}=۶۹۱۲$$

$$\text{حجم کره با شعاع ۶}=\frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳}\xrightarrow{R=۶}\frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۶^{۳}=۴\times ۶^{۳}=۸۶۴$$

$$\Rightarrow \text{مقدار گچ استفاده‌شده}=۶۹۱۲-۸۶۴=۶۰۴۸$$

مثال ۳ **قطر کرهٔ ماه، تقریباً ۳۵۰۰ کیلومتر است. اگر عدد پی را ۳ فرض کنیم، حجم آن چند مترمکعب است؟ (با نماد علمی نشان دهید.)**

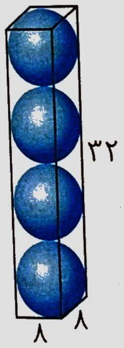
باید شعاع را برحسب متر به‌دست آوریم تا حجم بر حسب متر مکعب حساب شود:

قطر = ۳۵۰۰ کیلو متر = ۳۵۰۰۰۰۰ متر ⇒ شعاع = ۱۷۵۰۰۰۰ متر = ۱۷۵×۱۰^{۴} متر

$$\text{حجم}=\frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳}\xrightarrow{R=۱۷۵\times ۱۰^{۴}}\frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times(۱۷۵\times ۱۰^{۴})^{۳}=۴\times\underbrace{۱۷۵^{۳}}_{۵۳۵۹۳۷۵}\times ۱۰^{۱۲}=۲۱۴۳۷۵۰۰\times ۱۰^{۱۲}$$

نماد علمی این مقدار برابر با $۲/۱۴۳۷۵\times ۱۰^{۱۹}$ است (به عدد ۲۱۴۳۷۵۰۰، هفت رقم ممیز می‌دهیم، پس هفت واحد به توان عدد $۱۰^{۱۲}$ اضافه می‌شود).

مثال ۴ **چهارتوپ به قطر ۸ درون یک مکعب‌مستطیل روی هم قرار گرفته‌اند، به‌صورتی که کاملاً به دیواره‌های ظرف چسبیده‌اند. فضای خالی درون ظرف را مشخص کنید. ($\pi=۳$)**

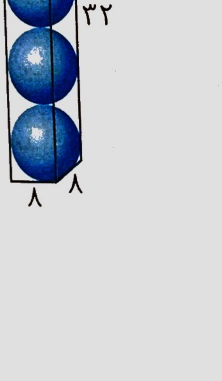


شکل به‌صورت روبه‌رو درمی‌آید. شعاع هر توپ ۴ است. طول و عرض ظرف با قطر دایره برابر هستند، پس این ظرف یک مکعب‌مستطیل به طول و عرض ۸ و ارتفاع ۳۲ است ($۴\times۸=۳۲$):

$$\text{حجم یک توپ}=\frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳}\xrightarrow{R=۴}\frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۴^{۳}=۲۵۶\Rightarrow \text{حجم ۴ توپ}=۲۵۶\times ۴=۱۰۲۴$$

$$\text{حجم مکعب‌مستطیل}=\underbrace{(۸\times ۸)}_{\text{مساحت قاعده}}\times\underbrace{۳۲}_{\text{ارتفاع}}=۲۰۴۸\Rightarrow \text{فضای خالی ظرف}=۲۰۴۸-۱۰۲۴=۱۰۲۴$$

مثال ۵ **فضای خالی درون مکعب زیر را محاسبه کنید. ($\pi=۳$)**



قطر هر کره نصف ضلع مکعب، یعنی ۶ است، بنابراین شعاع هر کره برابر با، ۳ است:

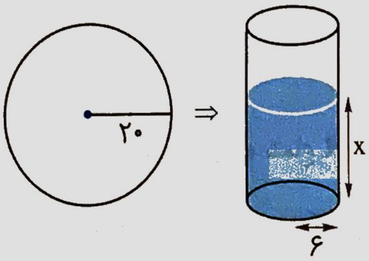
$$\text{حجم مکعب}=۱۲\times ۱۲\times ۱۲=۱۷۲۸\Rightarrow \text{حجم یک کره}=\frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳}\xrightarrow{R=۳}=\frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۳^{۳}=۱۰۸$$

$$\Rightarrow \text{فضای خالی}=۱۷۲۸-\underbrace{۸\times ۱۰۸}_{\text{حجم ۸ کره}}=۸۶۴$$

مثال ۶ آب درون یک کره به شعاع ۲۰ را درون یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۶ می‌ریزیم. آب تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟ $(\pi = ۳)$

حجم آب درون کره برابر است با:

$$V_{\text{آب}} = \frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳} \xrightarrow{R=۲۰} = \frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۲۰^{۳} = ۴\times ۲۰^{۳} = ۳۲۰۰۰$$



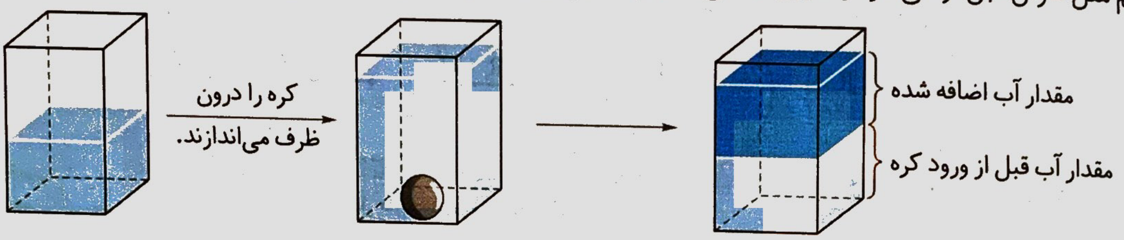
وقتی آب را درون استوانه می‌ریزیم، شکل استوانه را به خود می‌گیرد. در واقع ما استوانه‌ای به حجم ۳۲۰۰۰ داریم که شعاع قاعدهٔ آن ۶ است و می‌خواهیم ارتفاع آن را حساب کنیم:

$$\text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

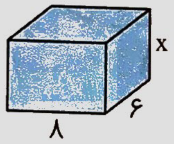
$$۳۲۰۰۰ = \underbrace{(۶\times۶\times۳)}_{۱۰۸} \times x \Rightarrow ۳۲۰۰۰ = ۱۰۸x \Rightarrow x = \frac{۳۲۰۰۰}{۱۰۸} \simeq ۲۹۶ \ (\text{ارتفاع آب})$$

مثال ۷ درون یک مکعب‌مستطیل دارای قاعده‌ای به طول ۸ و عرض ۶، مقداری آب وجود دارد. یک کره به شعاع قاعدهٔ ۴ را درون آن می‌اندازیم به‌صورتی که کره کاملاً در آب فرو می‌رود. آب درون ظرف چه‌قدر بالا می‌آید؟ $(\pi = ۳)$

در اینجا هم مثل سؤال قبل، وقتی کره را درون آب می‌اندازیم، حجم آب به‌اندازهٔ حجم کره زیاد می‌شود.



یعنی مقدار آب اضافه‌شده (که شکل یک مکعب‌مستطیل است)، با حجم کره برابر است. باید ارتفاع این مکعب‌مستطیل را به‌دست آوریم:



$$\text{حجم کره} = \text{حجم آب اضافه‌شده}$$

$$\frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳} = ۸\times۶\times x$$

$$\frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۴^{۳} = ۴۸x \Rightarrow ۲۵۶ = ۴۸x \Rightarrow x = \frac{۲۵۶}{۴۸} = \frac{۱۶}{۳}$$

مثال ۸ حجم کرهٔ A، از حجم کره‌ای به شعاع ۱۵ سانتی‌متر، به‌اندازهٔ ۱۱۴۵۲ واحد کم‌تر است. شعاع کره A را محاسبه کنید.

$$\text{حجم کره به شعاع ۱۵} = \frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳} = \frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۱۵^{۳} = ۱۳۵۰۰$$

$$\text{حجم کرهٔ A} = ۱۳۵۰۰ - ۱۱۴۵۲ = ۲۰۴۸$$

با داشتن حجم کرهٔ A، می‌توانیم شعاع آن را محاسبه کنیم:

$$\text{حجم کرهٔ A} = \frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳} \Rightarrow ۲۰۴۸ = \frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times R^{۳} \Rightarrow ۲۰۴۸ = ۴\times R^{۳} \Rightarrow R^{۳} = \frac{۲۰۴۸}{۴} = ۵۱۲$$

$$R^{۳} = ۵۱۲ = ۲^{۹} \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} R = \sqrt[۳]{۲^{۹}} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌شود}]{\text{توان بر ۳}} R = ۲^{۳} = ۸$$

مثال ۹ اگر شعاع کره‌ای را ۲ برابر کنیم، حجم آن چند برابر می‌شود؟

فرض کنیم شعاع کره در ابتدا R بوده است، پس وقتی آن را دو برابر می‌کنیم، شعاع آن $(۲R)$ می‌شود:

$$\text{حجم کرهٔ اوّلیه} = \frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳} \quad ، \quad \text{حجم کرهٔ جدید} = \frac{۴}{۳}\times\pi\times(۲R)^{۳} = \frac{۴}{۳}\times\pi\times ۲^{۳}\times R^{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{حجم جدید}}{\text{حجم اوّلیه}} = \frac{\cancel{\frac{۴}{۳}}\times\cancel{\pi}\times ۲^{۳}\times\cancel{R^{۳}}}{\cancel{\frac{۴}{۳}}\times\cancel{\pi}\times\cancel{R^{۳}}} = ۲^{۳}$$

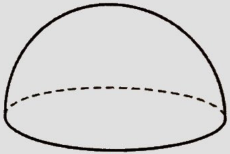
مثال ۱۰ مساحت کره‌ای به شعاع ۸، چه‌قدر از مساحت کره‌ای به شعاع ۶ بیش‌تر است؟

مساحت کره به شعاع ۸ = $۴\pi R^۲ \xrightarrow{R=۸} ۴\times ۳/۱۴\times ۸^۲ = ۸۰۳/۸۴$

مساحت کره به شعاع ۶ = $۴\pi R^۲ \xrightarrow{R=۶} ۴\times ۳/۱۴\times ۶^۲ = ۴۵۲/۱۶$

$\Rightarrow$ اختلاف = $۸۰۳/۸۴ - ۴۵۲/۱۶ = ۳۵۱/۶۸$

مثال ۱۱ مساحت کَل یک نیم‌کرهٔ تو پُر به شعاع ۵ را به‌دست آورید. $(\pi = ۳)$



سطح رویهٔ یک نیم‌کره، نصف یک کره است: مساحت نیم‌کره = $\frac{\cancel{۴}^{۲}\times\pi R^۲}{\cancel{۲}} = ۲\pi R^۲ = ۲\times ۳\times ۵^۲ = ۱۵۰$

اما دقت کنید چون نیم‌کرهٔ تو پُر یک قاعدهٔ دایره‌ای (به شعاع ۵) دارد، مساحت این قاعده هم، به مساحت نیم‌کره باید اضافه شود:

مساحت قاعدهٔ دایره‌ای = $R\times R\times\pi = ۵\times ۵\times ۳ = ۷۵ \Rightarrow$ مساحت کل = $۱۵۰+۷۵ = ۲۲۵$

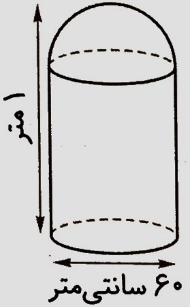
مثال ۱۲ مساحت کلّ یک کره، ۴۳۲ است. حجم این کره چه‌قدر است؟ $(\pi = ۳)$

ابتدا از روی رابطهٔ مساحت کره، شعاع آن را پیدا می‌کنیم:

مساحت کره = $۴\times\pi\times R^۲ \Rightarrow ۴۳۲ = \underbrace{۴\times ۳}_{۱۲}\times R^۲ \Rightarrow R^۲ = \frac{۴۳۲}{۱۲} = ۳۶ \Rightarrow R = \sqrt{۳۶} = ۶$

پس شعاع کره ۶ است، بنابر این حجم آن برابر است با:

حجم کره = $\frac{۴}{۳}\times\pi R^۳ = \frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۶^۳ = ۸۶۴$

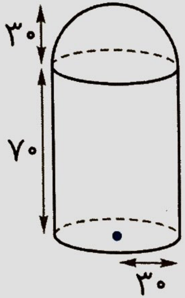


مثال ۱۳ در شکل زیر، ارتفاع کلّ حجم، یک متر و قطر قاعدهٔ آن ۶۰ سانتی‌متر است. حجم و مساحت کلّ آن را محاسبه کنید. $(\pi = ۳)$

چون شعاع نیم‌کره با شعاع استوانه برابر است (هر دو ۳۰ سانتی‌متر هستند)، پس می‌توان گفت ارتفاع استوانه، ۷۰ سانتی‌متر است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{حجم نیم‌کره} = \dfrac{\frac{۴}{۳}\times \pi R^{۳}}{۲} = \dfrac{\frac{۴}{\cancel{۳}}\times \cancel{۳}\times (۳۰)^{۳}}{۲} = \dfrac{\cancel{۴}^{۲}\times ۲۷۰۰۰}{\cancel{۲}} = ۵۴۰۰۰ \\ \text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعدهٔ} \times \text{ارتفاع} = \underbrace{(۳۰\times ۳۰\times ۳)}_{\text{مساحت قاعده}}\times ۷۰ = ۱۸۹۰۰۰ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{حجم کل} = ۵۴۰۰۰ + ۱۸۹۰۰۰ = ۲۴۳۰۰۰$$

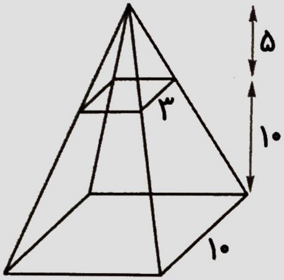


مساحت کلّ این شکل شامل مساحت رویهٔ نیم‌کره، مساحت جانبی استوانه و مساحت یک قاعدهٔ استوانه است:

$$\text{مساحت رویهٔ نیم‌کره} = \frac{\cancel{۴}\times \pi \times R^{۲}}{\cancel{۲}} = ۲\times \pi \times R^{۲} = ۲\times ۳\times ۳۰^{۲} = ۵۴۰۰$$

$$\text{مساحت جانبی استوانه} = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} = (۲\times \pi \times R)\times ۷۰ = (۲\times ۳\times ۳۰)\times ۷۰ = ۱۲۶۰۰$$

$$\text{مساحت قاعده} = R\times R\times \pi = ۳۰\times ۳۰\times ۳ = ۲۷۰۰ \Rightarrow \text{مساحت کل} = ۵۴۰۰ + ۱۲۶۰۰ + ۲۷۰۰ = ۲۰۷۰۰$$



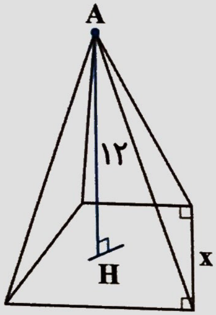
مثال ۲۴ در هرم زیر که قاعدهٔ آن مربع است، تکهٔ بالایی که قاعدهٔ آن هم مربع است را جدا می‌کنیم. حجم تکهٔ باقی‌مانده چه‌قدر است؟

دقت کنید که ارتفاع هرم بزرگ، ۱۰ + ۵ = ۱۵ است:

$$\text{مساحت مربع بزرگ}=۱۰\times۱۰=۱۰۰\Rightarrow$$

$$\text{حجم هرم بزرگ}=\frac{\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۳}=\frac{۱۰۰\times۱۵}{۳}=۵۰۰$$

$$\text{مساحت مربع کوچک}=۳\times۳=۹\Rightarrow\text{حجم هرم کوچک}=\frac{\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۳}=\frac{۹\times۵}{۳}=۱۵\Rightarrow\text{حجم تکهٔ پایین}=۵۰۰-۱۵=۴۸۵$$



مثال ۲۵ حجم هرم زیر که قاعدهٔ آن یک ذوزنقه است، ۱۸۰ است. اندازهٔ x را به‌دست آورید.

(قاعده‌های ذوزنقه، ۸ و ۱۰ هستند و ارتفاع هرم AH = ۱۲ است).

$$\text{حجم}=\frac{\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۳}\Rightarrow۱۸۰=\frac{\text{مساحت قاعده}\times\cancel{۱۲}^{۴}}{\cancel{۳}_{۱}}$$

$$\Rightarrow۱۸۰=\text{مساحت قاعده}\times۴\Rightarrow\text{مساحت قاعده}=۴۵$$

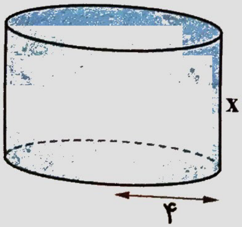
$$\text{مساحت قاعده}=\frac{\text{جمع قاعده‌های ذوزنقه}\times\text{ارتفاع ذوزنقه}}{۲}\Rightarrow۴۵=\frac{(۱۰+۸)\times x}{۲}$$

$$\Rightarrow۴۵=\frac{\cancel{۱۸}^{۹}\times x}{\cancel{۲}_{۱}}\Rightarrow۴۵=۹\times x\Rightarrow x=۵$$

مثال ۲۶ هرمی داریم که قاعدهٔ آن مثلثی به اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ است. ارتفاع هرم هم ۳۶ است. آن را پر از آب می‌کنیم و درون استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۴ می‌ریزیم. آب تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟ (π = ۳)

با توجه به اضلاع مثلث، این مثلث یک مثلث قائم‌الزاویه است:

$$\Rightarrow\text{مساحت مثلث (مساحت قاعدهٔ هرم)}=\frac{۵\times۱۲}{۲}=۳۰\Rightarrow\text{حجم هرم}=\frac{۳۰\times۳۶}{۳}=۳۶۰$$

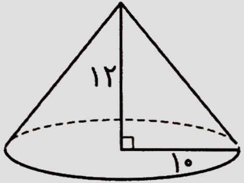


وقتی آب درون هرم را درون استوانه می‌ریزیم، شکل استوانه را به خود می‌گیرد (استوانه‌ای به شعاع ۴ و ارتفاع x):

حجم استوانه = حجم آب (حجم هرم)

$$۳۶۰=\underbrace{(۴\times۴\times\pi)}_{\text{مساحت قاعده}}\times\underbrace{x}_{\text{ارتفاع}}\Rightarrow۳۶۰=\underbrace{(۴\times۴\times۳)}_{۴۸}\times x\Rightarrow x=\frac{۳۶۰}{۴۸}=۷/۵$$

مثال ۳۰ حجم مخروطی به شعاع قاعده ۱۰ و ارتفاع ۱۲ را به‌دست آورید.



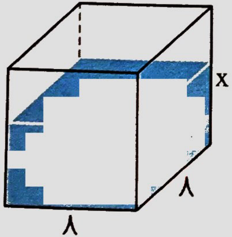
$$\text{مساحت قاعده} = ۱۰ \times ۱۰ \times ۳/۱۴ = ۳۱۴ \Rightarrow$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۳} = \frac{۳۱۴ \times ۱۲}{۳} = ۱۲۵۶$$

مثال ۳۱ آب درون یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۱۰ را درون یک مکعب به ضلع ۸ می‌ریزیم. آب تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟ $(\pi = ۳)$

آب درون مخروط، با حجم آن برابر است:

$$\text{مساحت قاعدهٔ مخروط} = ۶ \times ۶ \times ۳ = ۱۰۸ \Rightarrow \text{حجم مخروط} = \frac{۱۰۸ \times ۱۰}{۳} = ۳۶۰$$



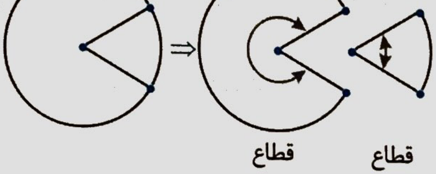
وقتی آب را درون مکعب می‌ریزیم، شکل آن را به خود می‌گیرد و به‌صورت یک منشور با طول و عرض ۸ و ارتفاع x درمی‌آید:

حجم آب (حجم مخروط) = حجم منشور

$$۳۶۰ = \underbrace{(۸ \times ۸)}_{\text{مساحت قاعده}} \times \underbrace{x}_{\text{ارتفاع}} \Rightarrow ۳۶۰ = ۶۴ \times x \Rightarrow x = \frac{۳۶۰}{۶۴} = ۵/۶۲۵$$

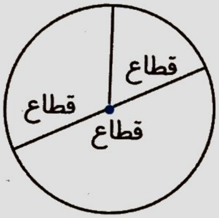
قطاع دایره: اگر از مرکز دایره دو شعاع دلخواه رسم کنیم، دایره به دو قسمت تقسیم می‌شود.

به هر تکه، **قطاع** گفته می‌شود.

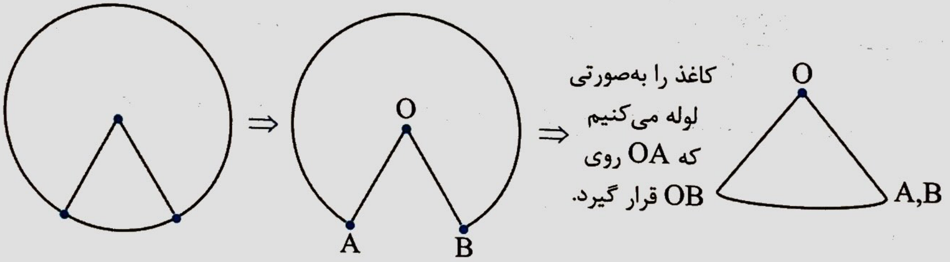


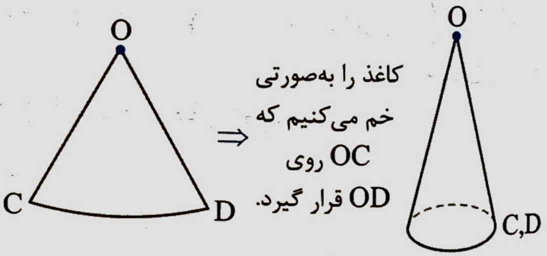
به عبارت دیگر هر قسمتی از دایره که بین دو شعاع آن قرار دارد را یک قطاع می‌گوییم.

حتی نیم‌دایره هم یک قطاع از دایره است.



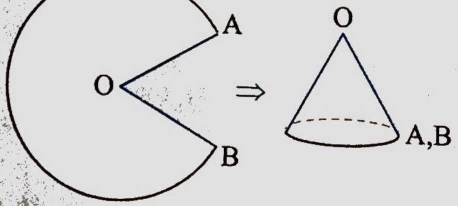
ساختن یک مخروط: برای ساختن یک مخروط، باید از یک دایرهٔ کاغذی یک قطاع جدا کنیم (هرگز با یک دایره کامل **نمی‌توان** مخروط ساخت). هر چه قطاع بزرگ‌تر باشد، قاعده مخروط پهن‌تر می‌شود. به‌عنوان مثال فرض کنید یک دایره را مانند شکل زیر به دو قطاع تبدیل کرده‌ایم. کافی است، شعاع‌ها را روی هم قرار دهیم تا مخروط ایجاد شود.



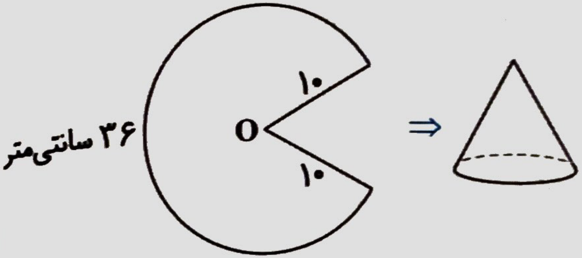


تذکر

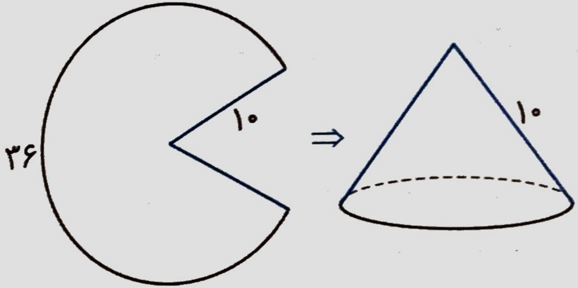
وقتی با یک قطاع از دایره، مخروط می‌سازید، شعاع قطاع تبدیل به مولد مخروط می‌شود و کمان قطاع تبدیل به دایرهٔ قاعده مخروط می‌شود (به رنگ‌های شکل روبه‌رو دقت کنید). در این شکل پس از تبدیل قطاع به مخروط، OA و OB روی هم قرار می‌گیرند و تبدیل به مولد مخروط می‌شوند. کمان AB قطاع هم تبدیل به محیط دایرهٔ قاعده مخروط می‌شود. مرکز قطاع، همان رأس مخروط خواهد بود.



مثال ۳۸ در شکل مقابل، شعاع قطاع جدا شده از دایره ۱۰ و طول کمان AB، ۳۶ سانتی‌متر است. با آن یک مخروط ساخته‌ایم. حجم مخروط را حساب کنید. $(\pi = ۳)$



می‌دانیم وقتی با یک قطاع از دایره، یک مخروط سازیم، شعاع قطاع همان مولد مخروط است و کمان قطاع همان محیط دایرهٔ قاعدهٔ مخروط است. پس در مخروط ایجادشده، مولد ۱۰ و محیط دایرهٔ قاعده هم ۳۶ است.

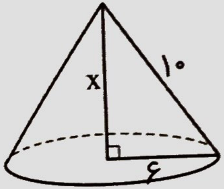


محیط دایرهٔ قاعده = ۲ × شعاع × $\pi \Rightarrow ۳۶ = ۲ \times R \times ۳ \Rightarrow ۳۶ = ۶ \times R \Rightarrow R = ۶$

پس شعاع دایره ۶ و مولد ۱۰ است. اکنون می‌توانیم ارتفاع مخروط را به‌دست آوریم:

$$x^۲ + ۶^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow x^۲ + ۳۶ = ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ = ۶۴ \Rightarrow x = ۸$$

شعاع ۶ و ارتفاع ۸ است:

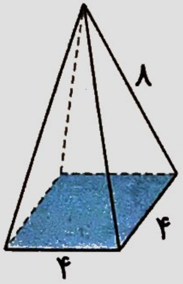


مساحت قاعده $= ۶ \times ۶ \times ۳ = ۱۰۸ \Rightarrow$ حجم مخروط $= \frac{\cancel{۱۰۸}^{۳۶} \times ۸}{\cancel{۳}_{۱}} = ۲۸۸$

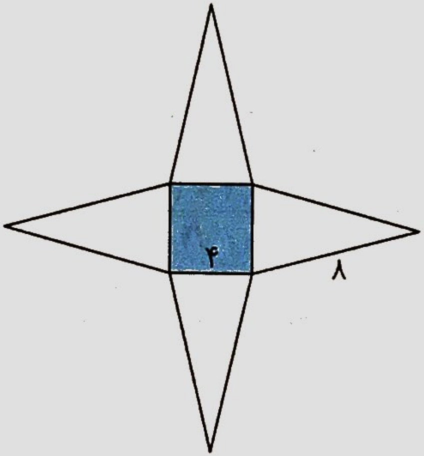
مثال ۳۹

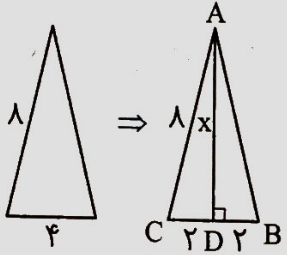
مثال ۴۰ مساحت کلّ هریک از هرم‌های داده‌شده را به‌دست آورید (برای هر کدام گسترده را رسم کنید). همهٔ این هرم‌ها، منتظم هستند.

(الف



ابتدا مساحت قاعده و سپس مساحت مثلث‌ها را به‌دست می‌آوریم: $۱۶ = ۴ \times ۴ =$ مساحت مربع





حال مساحت یک مثلث جانبی را حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow x^{۲} + ۲^{۲} = ۸^{۲} \Rightarrow x^{۲} + ۴ = ۶۴ \Rightarrow x^{۲} = ۶۰$$

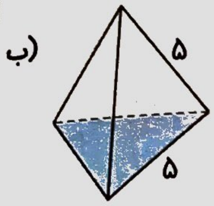
$$\Rightarrow x = \sqrt{۶۰} = \sqrt{۲^{۲} \times ۳^{۱} \times ۵^{۱}} = \sqrt{۲^{۲}} \times \sqrt{۳^{۱} \times ۵^{۱}} = ۲ \times \sqrt{۱۵}$$

$\Rightarrow$ مساحت مثلث ABC $= \dfrac{\cancel{۴}^{۲} \times ۲\sqrt{۱۵}}{\cancel{۲}} = ۴\sqrt{۱۵}$

پس مساحت قاعدهٔ هرم ۱۶ و مساحت هر مثلث جانبی، $۴\sqrt{۱۵}$ است:

مساحت کلّ شکل $= ۱۶ + \underbrace{۴ \times ۴\sqrt{۱۵}}_{\text{چهار مثلث جانبی}} = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۱۵}$

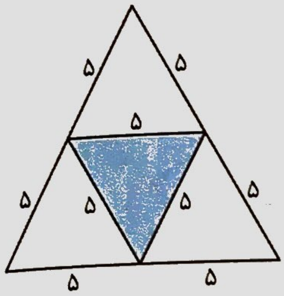
(ب)

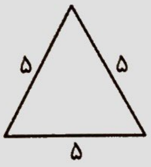
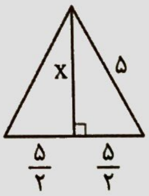


این شکل از ۴ مثلث به ضلع ۵ ساخته شده است. پس کافی است مساحت یکی را حساب کنیم و در ۴ ضرب کنیم:

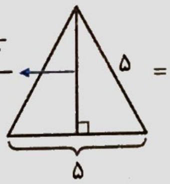
$$x^{۲}+\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۲}=۵^{۲}\Rightarrow x^{۲}+\frac{۲۵}{۴}=۲۵\Rightarrow x^{۲}=۲۵-\frac{۲۵}{۴}=\frac{۷۵}{۴}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{۷۵}{۴}}=\frac{\sqrt{۷۵}}{\sqrt{۴}}=\frac{\sqrt{۵^{۲}\times ۳}}{\sqrt{۲^{۲}}}=\frac{\sqrt{۵^{۲}}\times\sqrt{۳}}{\sqrt{۲^{۲}}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$



 ⇒ 

$\Rightarrow$ مساحت مثلث $\xleftarrow{\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}}$



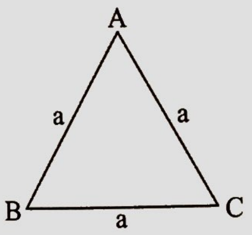
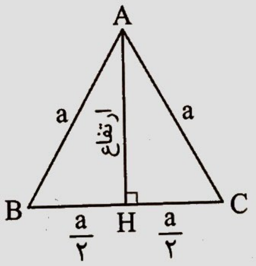
$$=\frac{\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}\times ۵}{۲}=\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۴}$$

پس مساحت هر مثلث، $\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۴}$ است و مساحت کلّ هرم که از ۴ مثلث ساخته شده برابر با $\cancel{۴}\times\frac{۲۵\sqrt{۳}}{\cancel{۴}}=۲۵\sqrt{۳}$ است.

تذکر

می‌دانیم هرم مثلث‌القاعده‌ای که در آن همهٔ یال‌ها و ضلع‌ها برابرند (چهار وجهی منتظم)، مانند شکل قسمت (ب) در مثال قبل، از ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. پس برای محاسبهٔ مساحت کل و مساحت جانبی آن، به مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع نیاز داریم. بنابراین بهتر است فرمول مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را بیاموزیم تا برای محاسبهٔ مساحت کل یا مساحت جانبی این هرم، کار ساده‌ای داشته باشیم. در اینجا ما فرمول به‌دست آوردن مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را اثبات می‌کنیم.

فرض کنید یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a داریم. اگر ارتفاع آن را رسم کنیم، قاعده را به دو قسمت مساوی که هر کدام $\frac{a}{۲}$ هستند، تقسیم می‌کند:

 ⇒ 

$$(\text{ارتفاع})^{۲}+\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}=a^{۲}\xleftarrow{\text{رابطهٔ فیثاغورس}}\quad\Rightarrow(\text{ارتفاع})^{۲}+\frac{a^{۲}}{۴}=a^{۲}$$

$$\Rightarrow(\text{ارتفاع})^{۲}=a^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}=\frac{۳a^{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع}=\sqrt{\frac{۳a^{۲}}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{a^{۲}}}{\sqrt{۴}}=\frac{\sqrt{۳}\times a}{۲}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

اکنون با داشتن ارتفاع $\left(\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\right)$ و قاعدهٔ a، می‌توانیم مساحت مثلث اصلی را به‌دست آوریم:

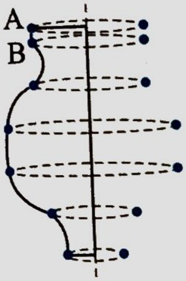
$$\text{مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع}=\frac{\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\times a}{۲}=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$$

پس مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، برابر با $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است. مثلاً مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰، برابر با $\frac{۱۰^{۲}\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۱۰۰\sqrt{۳}}{۴}=۲۵\sqrt{۳}$ است.

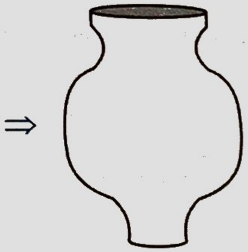
نکته

با توجه به این‌که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، برابر با $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است، پس مساحت چهاروجهی منتظم به ضلع a (هرم منتظم که همهٔ وجه‌های آن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a هستند) برابر با $a^{۲}\sqrt{۳}=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{\cancel{۴}}\times\cancel{۴}$ است.

دوران شکل‌ها: از دوران شکل‌ها هم به دور یک خط یا یکی از ضلع‌های خودشان، حجم‌های سه‌بعدی ایجاد می‌شود. برای اینکه بتوانیم شکل حاصل از دوران را پیدا کنیم (رسم کنیم)، بهتر است مسیر دوران چند رأس را مشخص کنیم و سپس حجم حاصل از دوران را رسم کنیم. در شکل‌های زیر، مسیر دوران شکل را نسبت به ضلع خودش (به‌صورت عمودی) رسم کرده‌ایم و سپس حجم حاصل از دوران را ترسیم کرده‌ایم.

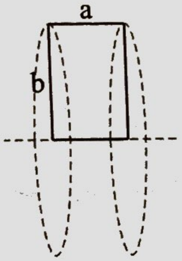


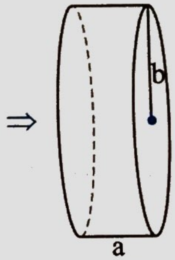
مسیر دوران


آنچه که در دوران سریع می‌بینیم.

دوران مستطیل: در پایهٔ هفتم دیدیم که از دوران یک مستطیل حول یک ضلع خودش (یا حول یک خط موازی ضلع‌هایش) یک استوانه ایجاد می‌شود.

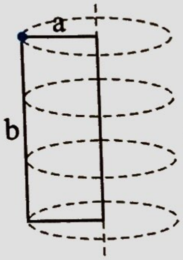
مسیر دوران حول ضلع a

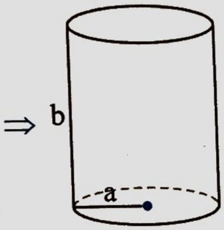




حجمی که می‌بینیم
(استوانه‌ای به شعاع b و ارتفاع a)

مسیر دوران حول ضلع b



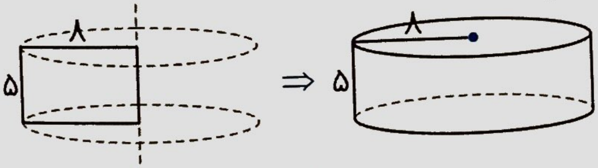


حجمی که می‌بینیم
(استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع b)

مشاهده می‌کنید که وقتی یک مستطیل را حول یکی از ضلع‌های آن دوران می‌دهیم، آن ضلع ارتفاع استوانه خواهد بود و ضلع دیگر، شعاع قاعدهٔ استوانه است.

مثال ۴۳ یک مستطیل به طول ۸ و عرض ۵ را یک بار حول طول و یک بار حول عرض آن دوران می‌دهیم. حجم‌های حاصل را رسم کرده و بگویید در کدام حالت حجم بیش‌تری ایجاد می‌شود. (π = ۳)

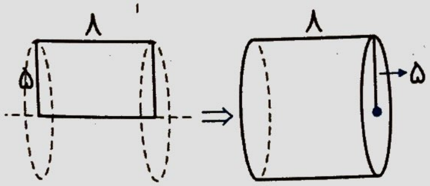
لف) دوران حول عرض:



مساحت قاعده = ۸ × ۸ × ۳ = ۱۹۲

حجم = مساحت قاعده × ارتفاع = ۱۹۲ × ۵ = ۹۶۰

) دوران حول طول:



مساحت قاعده = ۵ × ۵ × ۳ = ۷۵

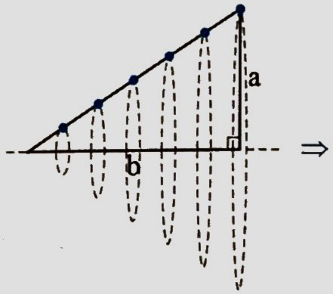
حجم = مساحت قاعده × ارتفاع = ۷۵ × ۸ = ۶۰۰

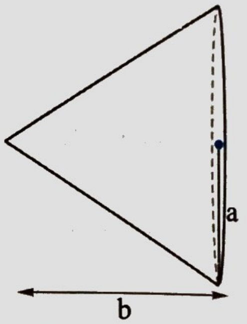
شاهده می‌کنید وقتی مستطیل را حول ضلع کوچک‌تر دوران دهیم، حجم بزرگ‌تری ایجاد می‌شود. علت آن هم این است که وقتی حول لع کوچک‌تر دوران می‌دهیم (حول عرض)، آن ضلع تبدیل به ارتفاع استوانه می‌شود و ضلع بزرگ‌تر تبدیل به شعاع استوانه می‌شود و حجم استوانه، شعاع تأثیر بیش‌تری دارد، پس حجم بیش‌تری ایجاد می‌شود:

حجم استوانه = مساحت قاعده × ارتفاع ⇒ $\underbrace{\text{شعاع} \times \text{شعاع}}_{\text{دو بار (ضلع بزرگ‌تر)}} \times \pi \times \underbrace{\text{ارتفاع}}_{\text{یک بار (ضلع کوچک‌تر)}}$

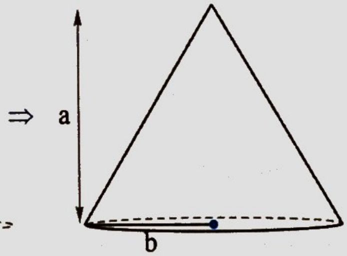
دوران مثلث قائم‌الزاویه: در شکل‌های زیر، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را حول ضلع‌های قائمهٔ آن‌ها دوران داده‌ایم. مشاهده می‌کنید که وقتی یک مثلث قائم‌الزاویه را حول یک ضلع قائمهٔ آن دوران می‌دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود.

ضلعی که حول آن دوران داده‌ایم، ارتفاع مخروط و ضلع دیگر شعاع قاعدهٔ مخروط خواهد بود.

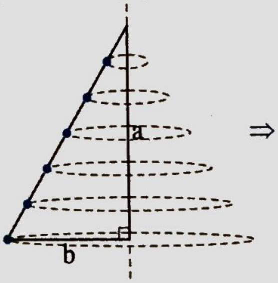




آنچه می‌بینیم (مخروطی به شعاع قاعدهٔ a و ارتفاع b)

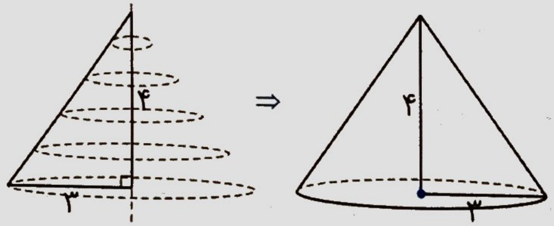


آنچه می‌بینیم (مخروطی به شعاع قاعدهٔ b و ارتفاع a)



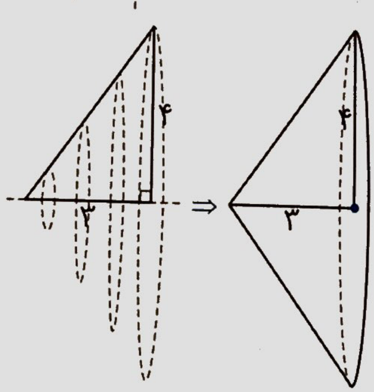
مسیر دوران حول ضلع a

مثال ۴۵ **مثلث قائم‌الزاویه‌ای به ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ را حول ضلع‌های قائمه (یک بار حول ۳ و یک بار حول ۴) دوران می‌دهیم. حجم‌های حاصل در هر نوبت را رسم و محاسبه کنید. (π = ۳)**



الف) دوران حول ضلع ۴:

مساحت قاعده = ۳ × ۳ × ۳ = ۲۷ ⇒ حجم = $\frac{۲۷ \times ۴}{۳}$ = ۳۶



ب) دوران حول ضلع ۳:

مساحت قاعده = ۴ × ۴ × ۳ = ۴۸ ⇒ حجم = $\frac{۴۸ \times ۳}{۳}$ = ۴۸

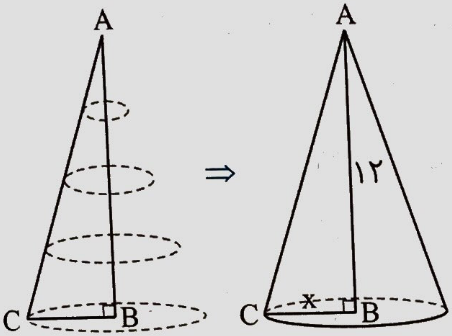
مشاهده می‌کنید که وقتی حول ضلع کوچک‌تر دوران می‌دهیم، حجم بیش‌تری ایجاد می‌شود، زیرا وقتی حول ضلع کوچک‌تر دوران می‌دهیم، آن ضلع ارتفاع و ضلع قائمه دیگر (ضلع بزرگ‌تر) شعاع قاعده می‌شود و در حجم مخروط، شعاع تأثیر بیش‌تری از ارتفاع دارد، پس حجم بزرگ‌تری ایجاد می‌شود:

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳} \times \underbrace{\text{شعاع} \times \text{شعاع}}_{\text{دو بار (ضلع بزرگ‌تر)}} \times \pi \times \underbrace{\text{ارتفاع}}_{\text{یک بار (ضلع کوچک‌تر)}}$$

مثال ۴۶ **مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل را حول ضلع AB ، دوران داده‌ایم. اگر حجم حاصل از دوران ۱۹۲ شده باشد، اندازهٔ ضلع BC را به‌دست آورید.** **$(\pi = ۳)$**

فرض کنیم ضلع $BC = x$ باشد. وقتی مثلث را حول AB دوران می‌دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود که AB ارتفاع آن و BC شعاع قاعدهٔ آن است:

مساحت قاعده $= x \times x \times \pi = ۳x^۲$

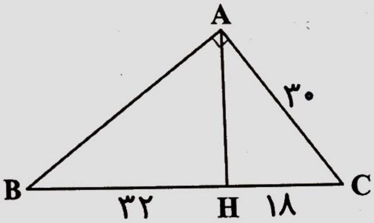


حجم $= \dfrac{۳x^۲ \times ۱۲}{۳}$

$$۱۹۲ = \frac{\cancel{۳}x^۲ \times ۱۲}{\cancel{۳}} \Rightarrow ۱۹۲ = x^۲ \times ۱۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱۹۲}{۱۲} = ۱۶ \Rightarrow x = ۴$$

یعنی ضلع BC (شعاع مخروط)، برابر با ۴ است.

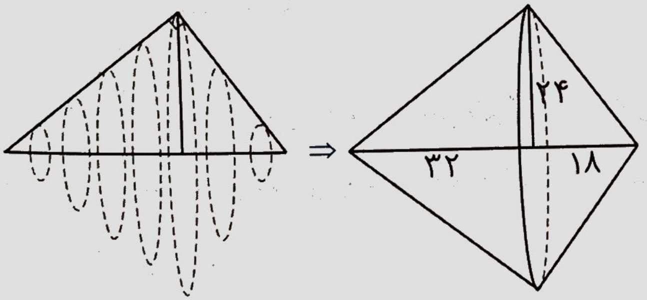
مثال ۴۷ **مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. حجم حاصل را رسم کنید و اندازهٔ آن را به‌دست آورید.** **$(\pi = ۳)$**



ابتدا از رابطهٔ فیثاغورس، طول AH را به‌دست می‌آوریم:

$$AH^۲ + ۱۸^۲ = ۳۰^۲ \Rightarrow AH^۲ + ۳۲۴ = ۹۰۰ \Rightarrow AH^۲ = ۵۷۶ \Rightarrow AH = ۲۴$$

حالا شکل دوران را کامل می‌کنیم. مشاهده می‌کنید که دو مخروط ایجاد می‌شود. یکی به شعاع ۲۴ و ارتفاع ۱۸ (مخروط سمت راست) و دیگری به شعاع ۲۴ و ارتفاع ۳۲ (مخروط سمت چپ). پس قاعده هر دو مخروط یکسان است:



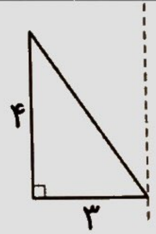
مساحت قاعده $= ۲۴ \times ۲۴ \times ۳ = ۱۷۲۸$

$\Rightarrow$ حجم مخروط سمت راست $= \dfrac{۱۷۲۸ \times ۱۸}{۳} = ۱۰۳۶۸$

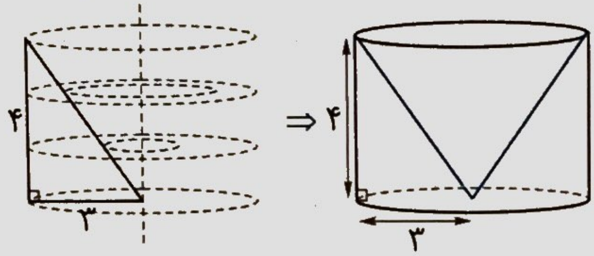
$\Rightarrow$ حجم مخروط سمت چپ $= \dfrac{۱۷۲۸ \times ۳۲}{۳} = ۱۸۴۳۲$

$\Rightarrow$ حجم کل $= ۱۰۳۶۸ + ۱۸۴۳۲ = ۲۸۸۰۰$

مثال ۴۹ **اگر مثلث ABC را حول خط‌چین دوران دهیم، چه حجمی به‌دست می‌آید؟ آن را محاسبه کنید.**



اگر شکل دوران را کامل کنیم، یک استوانه به شعاع ۳ و ارتفاع ۴ داریم که یک مخروط با همین ابعاد از آن خالی شده است:



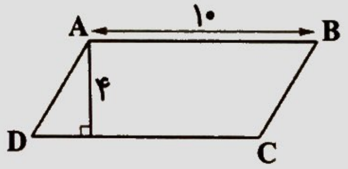
$$۱۰۸ = \underbrace{۴}_{\text{ارتفاع}} \times \underbrace{۳ \times ۳ \times ۳}_{\text{مساحت قاعده}} = \text{حجم استوانه}$$

می‌دانیم حجم این مخروط، $\frac{۱}{۳}$ حجم استوانه‌اش است:

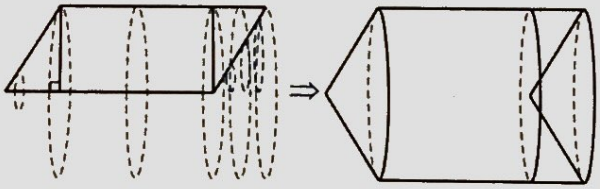
$$۷۲ = ۳۶ - ۱۰۸ = \text{حجم باقی‌مانده} \Leftarrow ۳۶ = ۱۰۸ \times \frac{۱}{۳} = \text{حجم مخروط}$$

از ابتدا هم می‌توان گفت، چون حجم مخروط $\frac{۱}{۳}$ استوانه است، پس $\frac{۱}{۳}$ استوانه خالی شده و $\frac{۲}{۳}$ آن باقی‌مانده است: $\frac{۲}{۳} \times ۱۰۸ = ۷۲$

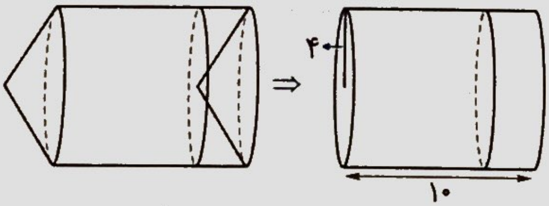
مثال ۵۰ **اگر شکل زیر را حول CD دوران دهیم، حجم حاصل چه‌قدر خواهد بود؟ شکل را رسم کنید. (π = ۳)**



ابتدا شکل دوران را کامل می‌کنیم.

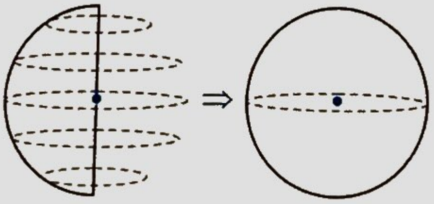


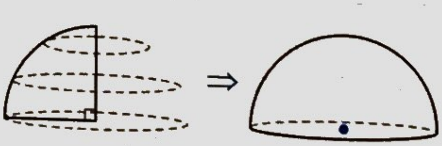
می‌بینید که یک مخروط در سمت چپ، یک استوانه در وسط و یک استوانه که از درون آن یک مخروط خارج شده است، در سمت راست ایجاد شده است. حال اگر ما مخروط سمت چپ را به داخل استوانهٔ سمت راست ببریم، شکل به‌صورت زیر درمی‌آید (استوانهٔ راست پر می‌شود)، یعنی یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۱۰ خواهیم داشت:



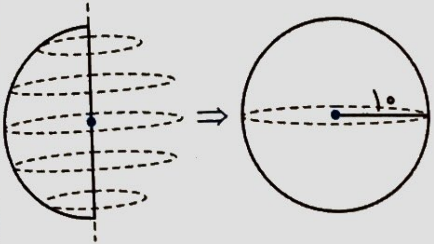
$$۴۸۰ = ۱۰ \times ۴۸ = \text{حجم} \Leftarrow ۴۸ = ۳ \times ۴ \times ۴ = \text{مساحت قاعده}$$

دوران نیم‌دایره و ربع دایره: اگر یک نیم‌دایره را حول قطرش دوران دهیم، یک کره ایجاد می‌شود و اگر یک ربع‌دایره را حول شعاعش دوران دهیم، یک نیم‌کره ایجاد می‌شود.





مثال ۵۱ یک نیم‌دایره با شعاع ۱۰ را حول قطرش و یک ربع‌دایره را با شعاع ۵ حول شعاعش دوران می‌دهیم. حجم و مساحت کلّ هر کدام را محاسبه کنید. $(\pi = ۳)$



الف) دوران نیم‌دایره:

حجم $= \frac{۴}{۳}\times\pi\times R^{۳} = \frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۱۰^{۳} = ۴۰۰۰$

مساحت $= ۴\times\pi\times R^{۲} = ۴\times ۳\times ۱۰^{۲} = ۱۲۰۰$

ب) دوران ربع‌دایره:

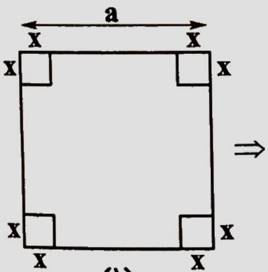
حجم $= \frac{۱}{۲}$ حجم کره $= \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}}{۲} = \frac{= \frac{۴}{\cancel{۳}}\times\cancel{۳}\times ۵^{۳}}{۲} = \frac{۵۰۰}{۲} = ۲۵۰$

مساحت رویهٔ نیم‌کره $= \frac{۱}{۲}$ مساحت کره $= \frac{۱}{۲}\times ۴\times\pi R^{۲} = \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳\times ۵^{۲} = ۱۵۰$

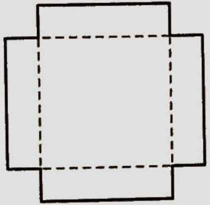
مساحت دایرهٔ قاعدهٔ نیم‌کره $= ۵\times ۵\times ۳ = ۷۵ \Rightarrow$ مساحت کل $= ۱۵۰ + ۷۵ = ۲۲۵$

نیم دایره

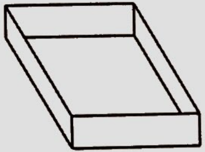
مثال ۵۳ از چهار گوشهٔ یک مقوای مربع‌شکل به ضلع a، چهار مربع به ضلع x ساخته‌ایم و با خم کردن خط‌چین‌ها یک جعبه ساخته‌ایم. می‌خواهیم چهار کره به شعاع x را درون این جعبه قرار دهیم. چه رابطه‌ای بین x و a وجود دارد؟



(۱)



(۲)



(۳)

سطح کف این جعبه، همان قسمت خط‌چین در شکل وسطی است (شکل صورت سؤال). حال که می‌خواهیم ۴ کره روی آن قرار بگیرد، پس باید ضلع آن، به‌اندازهٔ قطر دو دایره باشد (یعنی به‌اندازهٔ ۴ شعاع ۴x). پس طول ضلع کاغذ اوّلیه باید ۶x باشد، و این یعنی: a = ۶x